

# BEITRÄGE ZUR GLEICHZEITIGEN UND SUKZESSIVEN APPROXIMATION VON DÄMPFUNGS- UND GRUPPENLAUFZEITVORSCHRIFTEN

Der Technischen Fakultät  
der Universität Erlangen-Nürnberg  
zur Erlangung des Grades  
Doktor der Ingenieurwissenschaften

vorgelegt von  
Christian Krauß

Erlangen 1980



GETRACHT ZUR GLEICHZEITIGEN  
UND SUKZESSIVEN APPROXIMATION  
VON ANFANGS- UND  
GUTEN ZEITUNTERSTREICHEN



Digitized by the Internet Archive  
in 2026



# BEITRÄGE ZUR GLEICHZEITIGEN UND SUKZESSIONEN APPROXIMATION VON DÄMPFUNGS- UND GRUPPENLAUFZEITVORSCHRIFTEN

Der Technischen Fakultät  
der Universität Erlangen - Nürnberg  
zur Erlangung des Grades  
Doktor der Ingenieurwissenschaften

vorgelegt von  
Christian Krauß

Erlangen 1980



Als Dissertation genehmigt von der  
Technischen Fakultät der Universität  
Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung: 25. 10. 1979

Tag der Promotion: 29. 1. 1980

Dekan: Prof. Dr. -Ing. H. Niemann  
Berichterstatter: Prof. Dr. -Ing. R. Unbehauen  
Prof. Dr. -Ing. H. W. Schüßler

Herrn Prof. Dr. -Ing. R. Unbehauen möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für zahlreiche Hinweise.

Weiterhin möchte ich mich bei Herrn Dr. -Ing. K. -H. Feistel und Herrn Dr. -Ing. habil. E. Wehrhahn für wertvolle Ratschläge und Anregungen sehr herzlich bedanken, die sie mir in zahlreichen Gesprächen vermittelten.

Herrn Prof. Dr. -Ing. H. W. Schüßler gilt mein Dank für die Übernahme des Korreferats.

Frau A. Obermayer danke ich für die sorgfältige Anfertigung der Reinschrift.



|                                                                                                                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Zusammenstellung der wichtigsten verwendeten Symbole                                                                                                                 | III |
| Überblick                                                                                                                                                            | V   |
| <br>                                                                                                                                                                 |     |
| I. Allgemeine Gesichtspunkte zur Approximation von Gruppenlaufzeitvorschriften sowie zur gleichzeitigen Approximation von Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitvorschriften | 1   |
| 1. Über die Bedeutung der Approximation im Frequenzbereich im Rahmen der Netzwerksynthese                                                                            | 1   |
| 2. Mathematische Grundlagen                                                                                                                                          | 2   |
| 3. Formulierung des Approximationsproblems                                                                                                                           | 8   |
| 4. Parameterstruktur                                                                                                                                                 | 12  |
| 5. Approximation mit Hilfe von Optimierung                                                                                                                           | 13  |
| 6. Allgemeine Gesichtspunkte für die Entwicklung von Computer-Programmen                                                                                             | 18  |
| <br>                                                                                                                                                                 |     |
| II. Approximation des Gruppenlaufzeitverlaufs                                                                                                                        | 21  |
| 1. Zweck                                                                                                                                                             | 21  |
| 2. Verwendung von Allpässen, Parametertransformation zur Stabilitätssicherung                                                                                        | 21  |
| 3. Startwertproblem, Gewinnung von Ausgangsnäherungen, Fehlersymmetrierung                                                                                           | 24  |
| 4. Wahl geeigneter Fehlerkriterien                                                                                                                                   | 27  |
| 5. Freiheitsgrade für die Optimierung                                                                                                                                | 28  |
| 6. Approximation des Gruppenlaufzeitverlaufs mit Hilfe eines Optimierungsverfahrens sowie entsprechender Fehlerge-<br>wichtung                                       | 31  |
| 7. Fehlerextremwertbestimmung und Stützstellenneuer-<br>teilung                                                                                                      | 36  |
| 8. Berücksichtigung von Nebenbedingungen                                                                                                                             | 38  |
| 9. Beispiele                                                                                                                                                         | 40  |

|                                                                                                                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| III. Gleichzeitige Approximation von Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitvorschriften                                                                                   | 53 |
| 1. Zusammenhang zwischen Übertragungsfunktion, Dämpfung und Gruppenlaufzeit; Parametertransformation zur Stabilitätssicherung; Freiheitsgrade für die Optimierung | 53 |
| 2. Sukzessive Approximation                                                                                                                                       | 56 |
| 3. Zweck der gleichzeitigen Approximation, Vergleich mit der sukzessiven Approximation                                                                            | 58 |
| 4. Startwertproblem                                                                                                                                               | 60 |
| 5. Wahl geeigneter Fehlerkriterien                                                                                                                                | 61 |
| 6. Gleichzeitige Approximation mit Hilfe eines Optimierungsverfahrens sowie entsprechender Fehlergewichtung                                                       | 61 |
| 7. Fehlerextremwertbestimmung und Stützstellenneuteilung                                                                                                          | 68 |
| 8. Berücksichtigung von Nebenbedingungen                                                                                                                          | 69 |
| a) Einseitige Dämpfungsforderungen                                                                                                                                | 70 |
| b) Mindestabstand der Pole von der imaginären Achse der p-Ebene                                                                                                   | 72 |
| c) Einschränkung des Variationsbereichs der Gruppenlaufzeitkonstante                                                                                              | 74 |
| d) Festhalten einzelner Parameter                                                                                                                                 | 74 |
| e) Erzeugung von Nullstellen-Quadrupeln bzw. Nullstellen-Paaren und Beibehalten dieser Struktur bei der Approximation                                             | 75 |
| f) Beibehalten von Pol-Nullstellen-Quadrupeln bzw. Pol-Nullstellen-Paaren der Startlösung                                                                         | 76 |
| g) Vergleich der drei in d - f behandelten Nebenbedingungen                                                                                                       | 77 |
| 9. Beispiele                                                                                                                                                      | 80 |

# Zusammenstellung der wichtigsten verwendeten Symbole

|                                           |                                                                        |
|-------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| $\omega, \Omega$                          | Kreisfrequenz, normierte Kreisfrequenz                                 |
| $f_B$                                     | Bezugsfrequenz, Normierungsfrequenz                                    |
| $p$                                       | komplexe Frequenz                                                      |
| $a_S(\omega)$                             | Dämpfungs-Vorschrift (Soll-Funktion)                                   |
| $a(\omega, \underline{x})$                | Dämpfung (Ist-Funktion)                                                |
| $a_N(\omega)$                             | einseitige Dämpfungsforderung                                          |
| $d_a(\omega)$                             | Dämpfungs-Toleranzfunktion (zweiseitige Toleranz)                      |
| $f_a(\omega, \underline{x})$              | toleranz-normierte Dämpfungs-Fehlerfunktion                            |
| $g_a(\omega, \underline{x}, \gamma_1)$    | gewichtete Dämpfungs-Fehlerfunktion                                    |
| $f_{aN}(\omega, \underline{x})$           | toleranz-normierte Fehlerfunktion bei einseitigen Dämpfungsforderungen |
| $g_{aN}(\omega, \underline{x}, \gamma_N)$ | gewichtete Fehlerfunktion bei einseitigen Dämpfungsforderungen         |
| $b(\omega)$                               | Phase                                                                  |
| $t_P(\omega)$                             | Phasenlaufzeit                                                         |
| $t_{GS}(\omega)$                          | Gruppenlaufzeit-Vorschrift (Soll-Funktion)                             |
| $t_G(\omega, \underline{x})$              | Gruppenlaufzeit (Ist-Funktion)                                         |
| $T_G(\Omega)$                             | frequenznormierte Gruppenlaufzeit                                      |
| $d_{TG}(\omega)$                          | Gruppenlaufzeit-Toleranzfunktion (zweiseitige Toleranz)                |
| $f_{TG}(\omega, \underline{x})$           | toleranz-normierte Gruppenlaufzeit-Fehlerfunktion                      |
| $g_{TG}(\omega, \underline{x}, \gamma_2)$ | gewichtete Gruppenlaufzeit-Fehlerfunktion                              |

|                                                    |                                                                          |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $t_0, T_0$                                         | Gruppenlaufzeitkonstante, normierte Gruppenlaufzeitkonstante             |
| $K$                                                | konstanter Faktor der Übertragungsfunktion                               |
| $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_N, \gamma$             | Gewichtsschranken                                                        |
| $\underline{x}$                                    | Parametervektor                                                          |
| $\underline{z}(\underline{x})$                     | Fehlervektor                                                             |
| $Z(\underline{x})$                                 | Fehlerquadratsumme                                                       |
| $f(\omega, \underline{x})$                         | toleranz-normierte Fehlerfunktion                                        |
| $g(\omega, \underline{x}, \gamma)$                 | gewichtete Fehlerfunktion                                                |
| $FQS(\underline{x}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_N)$ | gewichtete Fehlerquadratsumme                                            |
| $H(p)$                                             | Übertragungsfunktion                                                     |
| $l$                                                | Anzahl der konjugiert komplexen Nullstellen                              |
| $\lambda$                                          | Anzahl der reellen Nullstellen                                           |
| $k$                                                | Anzahl der konjugiert komplexen Pole                                     |
| $\kappa$                                           | Anzahl der reellen Pole                                                  |
| $p_0$                                              | Nullstelle von $H(p)$                                                    |
| $p_\infty$                                         | Pol von $H(p)$                                                           |
| $d(\Omega)$                                        | frequenznormierte Toleranzfunktion                                       |
| $e(\Omega, \underline{x})$                         | frequenznormierte Fehlerfunktion                                         |
| $\epsilon$                                         | Betrag des Mindestabstands der Pole von der imaginären Achse der p-Ebene |
| $\mathbf{J}(\underline{x})$                        | Jacobi-Matrix                                                            |

## ÜBERBLICK

Die enormen Fortschritte in der Computertechnik, die in den letzten 20 Jahren erfolgt sind, machen es möglich, sich mit Problemen zu beschäftigen, an die man früher wegen zu umfangreicher Rechenarbeit nicht herangegangen ist.

So ist der Digitalrechner als Hilfsmittel in der Elektrotechnik heute nicht mehr wegzudenken. Mit seiner Hilfe können z. B. in der Netzwerksynthese Probleme untersucht werden, die ohne dieses Hilfsmittel nur in Einzelfällen gelöst werden können.

Ein Gebiet, das von den modernen Großrechnern besonders profitiert hat, ist die Approximation; denn nur in Sonderfällen ist eine geschlossene Lösung möglich. Aus diesem Teilbereich der Netzwerksynthese stammt die vorliegende Arbeit.

Sie befaßt sich mit der Approximation von Gruppenlaufzeitvorschriften sowie mit der gleichzeitigen Approximation von Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitvorschriften. Dabei werden sowohl bisher bekannte Ergebnisse kurz skizziert als auch neue Lösungswege aufgezeigt.

Die Arbeit gliedert sich in drei Teile.

Teil I befaßt sich mit allgemeinen Gesichtspunkten, die bei der Approximation einer oder mehrerer Vorschriften im Frequenzbereich auftreten. Zunächst wird die Bedeutung einer derartigen Approximation behandelt. Ferner legt ein eigenes Kapitel die mathematischen Grundlagen dar. Nach der Formulierung des Approximationsproblems werden die Vor- und Nachteile einiger möglicher Parameterstrukturen diskutiert. Ferner geht es um die Verwendung von Optimierungsverfahren bei der Approximation sowie um Gesichtspunkte, die bei der Entwicklung von Rechnerprogrammen eine Rolle spielen.

Teil II behandelt die Approximation von Gruppenlaufzeitvorschriften, wobei

neben dem Zweck einer solchen Approximation auch Allpässe sowie eine Parametertransformation zur Stabilitätssicherung erörtert werden. Nach der sich anschließenden Besprechung des Startwertproblems, der Gewinnung von Ausgangsnäherungen und der Fehlersymmetrierung werden die Freiheitsgrade für die Optimierung sowie zwei Fehlerkriterien untersucht. Im engen Zusammenhang damit steht das danach folgende Verfahren zur Approximation von Gruppenlaufzeitvorschriften mit Hilfe eines Optimierungsverfahrens sowie entsprechender Fehlergewichtung. Den im letzten Kapitel von Teil II dargelegten Beispielen geht eine Besprechung der Fehlerextremwertbestimmung, Stützstellenneuverteilung und Berücksichtigung von Nebenbedingungen voraus.

Teil III als das Kernstück der vorliegenden Arbeit behandelt die gleichzeitige Approximation von Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitvorschriften. Das erste Kapitel bringt den Zusammenhang zwischen Übertragungsfunktion, Dämpfung und Gruppenlaufzeit eines Zweitors, ferner eine Parametertransformation zur Stabilitätssicherung und beschäftigt sich mit den für die Optimierung zur Verfügung stehenden Freiheitsgraden. Danach folgt eine Skizzierung der sukzessiven Approximation. Diese wird dann mit der gleichzeitigen Approximation verglichen, nachdem deren Zweck erörtert worden ist. Das Startwertproblem und die Gewinnung von Ausgangsnäherungen sind Thema des darauffolgenden Kapitels. Nach der Wahl von Fehlerkriterien geht es dann um ein Verfahren zur gleichzeitigen Approximation mit Hilfe eines Optimierungsverfahrens sowie entsprechender Fehlergewichtung. Der Fehlerextremwertbestimmung, Stützstellenneuverteilung und Berücksichtigung von zahlreichen Nebenbedingungen sind die beiden nächsten Kapitel gewidmet. Den Abschluß bilden einige, ausführlich besprochene Beispiele, aus denen die Vorteile der gleichzeitigen gegenüber der sukzessiven Approximation ersichtlich sind.





# I. ALLGEMEINE GESICHTSPUNKTE ZUR APPROXIMATION VON GRUPPENLAUFZEITVORSCHRIFTEN SOWIE ZUR GLEICHZEITIGEN APPROXIMATION VON DÄMPFUNGS- UND GRUPPENLAUFZEITVORSCHRIFTEN

## 1. Über die Bedeutung der Approximation im Frequenzbereich im Rahmen der Netzwerksynthese

Das klassische Vorgehen in der Netzwerksynthese besteht aus zwei Schritten, Approximation und Realisierung. Beim Approximationsschritt sucht man eine in der rechten  $p$ -Halbebene holomorphe Funktion, welche den Verlauf der Vorschrift (z. B. Gruppenlaufzeitvorschrift in einem Frequenzintervall) "möglichst gut" approximiert. Als eine solche Funktion kann man z. B. die Übertragungsfunktion eines Zweitors wählen. Als Ergebnis der Approximation erhält man eine Funktion, aus der nun ein ihr entsprechendes Netzwerk gewonnen werden kann. Dies erfolgt im Realisierungsschritt. Wie man sehen kann, ist man nach erfolgter Approximation noch nicht auf irgendeine bestimmte Netzwerkstruktur festgelegt. Ebenso wenig ist schon eine Entscheidung darüber gefallen, ob die Realisierung passiv oder etwa durch eine aktive RC-Realisierung erfolgen soll, die bei niedrigeren Frequenzen empfehlenswert ist. Approximation und Realisierung können also voneinander völlig unabhängig erfolgen.

Diesem Vorteil stehen aber auch einige Nachteile gegenüber. So lassen sich Unvollkommenheiten von Bauelementen (Verluste von Spulen, parasitäre Effekte) nur zum Teil berücksichtigen.

Neben dieser klassischen Methode gibt es noch den sogenannten rechnergestützten Entwurf. Hierbei ist das Netzwerk vorgegeben, und die Werte der Bauelemente werden mit Hilfe eines Rechners so bestimmt, daß das Netzwerk vorgeschriebenen Forderungen genügt. Dabei lassen sich parasitäre

Effekte sowie technologische Nebenbedingungen vergleichsweise einfach berücksichtigen. Es ergeben sich jedoch folgende Nachteile:

Die Struktur des Netzwerks kann sich als schlecht gewählt erweisen. Das zeigt sich darin, daß sich die gleichen Forderungen bei günstigerer Struktur mit bisweilen viel geringerem Aufwand erfüllen lassen. Ferner hat sich gezeigt, daß numerische Schwierigkeiten eine größere Rolle spielen als bei der klassischen Methode.

Ausschlaggebend für die Wahl des Verfahrens ist also der Zweck, wofür es angewendet werden soll.

Schließlich sei auf einen Punkt hingewiesen, der in Zukunft noch mehr Bedeutung bekommen wird: Die Synthese digitaler Filter. Die durch den Approximationsschritt der klassischen Synthese erreichten Ergebnisse lassen sich unmittelbar zum Entwurf digitaler Filter verwenden.

## 2. Mathematische Grundlagen

Die bei der Approximation auftretenden Probleme lassen sich in folgende Fragestellungen aufteilen:

- 1) Welche Menge von Approximationsfunktionen ist für das vorliegende Problem geeignet?
- 2) Welches Approximationskriterium soll verwendet werden?
- 3) Existiert eine Minimallösung?
- 4) Wodurch ist sie charakterisiert?
- 5) Ist sie eindeutig?
- 6) Mit Hilfe welcher Algorithmen läßt sich eine Minimallösung finden?

Bevor diese Fragen behandelt werden, sollen einige Grundbegriffe aus der Approximationstheorie gebracht werden, wie sie in ähnlicher Form z. B. in [22] dargestellt sind.

$J$  sei eine Untermenge des Intervalls  $[0, +\infty)$  einer  $\omega$ -Achse.  $J$  bestehe aus wenigstens  $n+1$  Punkten.  $C(J)$  sei die Menge aller auf dem Kompaktum  $J$  stetigen Funktionen. In  $C(J)$  wird durch die Vorschrift

$$\|f\| := \max_{\omega \in J} |f(\omega)| \quad (\text{I. 2. 1})$$

eine Norm eingeführt, die als Tschebyscheff- oder  $L_\infty$ -Norm bezeichnet wird. Die Zahl  $\|f-g\|$  definiert zwischen zwei Funktionen  $f, g \in C(J)$  einen Abstand.

Eine andere gebräuchliche Norm ist die Fehlerquadrat- oder  $L_2$ -Norm. Im Falle einer diskreten Punktmenge ist sie als

$$\|f\|_2 := \sqrt{\sum_{\omega \in J} f^2(\omega)} \quad (\text{I. 2. 2})$$

gegeben.

$M$  sei eine Parametermenge mit den Elementen  $\underline{a}$ .  $F(\underline{a}, \omega)$  sei für jedes Element  $\underline{a}$  eine stetige Funktion. Die Menge aller derartigen Funktionen sei mit  $G$  bezeichnet.

$$G = \{ F(\underline{a}, \omega) \mid \underline{a} \in M ; F \in C(J) \} \quad (\text{I. 2. 3})$$

$M$  ist in den hier betrachteten Fällen eine Teilmenge des  $n$ -dimensionalen Zahlenraums  $R^n$ .  $F(\underline{a}, \omega)$  kann beispielsweise die Gruppenlaufzeit eines Allpasses sein. Die Funktion  $f(\omega)$  sei ein beliebiges (festgehaltenes) Element der Menge  $C(J)$ , und  $F(\underline{a}, \omega)$  ein ebensolches Element aus der Menge  $G$ . Die Größe

$$E(f, \underline{a}) := \| F(\underline{a}, \omega) - f(\omega) \| \quad (\text{I. 2. 4})$$

ist ein Maß für die Güte, mit der  $f(\omega)$  durch  $F(\underline{a}, \omega)$  approximiert wird. Eine

gegebene Funktion  $f(\omega) \in C(J)$  im Sinne einer bestimmten Norm durch eine Funktion  $F(\underline{a}, \omega) \in G \subset C(J)$  "möglichst gut" zu approximieren heißt, einen solchen Parametervektor  $\underline{a}^* \in M$  zu finden, für den

$$E(f, \underline{a}^*) \leq E(f, \underline{a}) \quad \forall \underline{a} \in M \quad (\text{I. 2. 5})$$

gilt. Die Konstruktion einer Minimallösung ist definitionsgemäß gleichzeitig mit der Suche nach einem globalen Minimum der Funktion  $E(f, \underline{a})$ . Jede Funktion  $F(\underline{a}^*, \omega) =: F^*$ , die diese Bedingung erfüllt, heißt eine beste Approximation oder Minimallösung für das Element  $f$  in Bezug auf die Menge  $G$ .

Ein Punkt  $\omega_e \in J$ , für den

$$|F(\underline{a}, \omega_e) - f(\omega_e)| = \|F(\underline{a}, \omega) - f(\omega)\| \quad (\text{I. 2. 6})$$

gilt, heißt Extrempunkt der Fehlerkurve.

Eine Menge

$$A := \{\omega_\lambda \mid \omega_\lambda \in J, \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_l\} \quad (\text{I. 2. 7})$$

heißt Alternante der Länge  $l$ , wenn die Funktion  $F(\underline{a}^*, \omega) - f(\omega)$  an den Punkten  $\omega_\lambda$  die Extremaalabweichung mit wechselndem Vorzeichen annimmt. Für die Elemente  $\omega_\lambda$  der Menge  $A$  gilt also

$$|F(\underline{a}^*, \omega_\lambda) - f(\omega_\lambda)| = \|F(\underline{a}^*, \omega) - f\| \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l) \quad (\text{I. 2. 8})$$

und

$$F(\underline{a}^*, \omega_\lambda) - f(\omega_\lambda) = - [F(\underline{a}^*, \omega_{\lambda+1}) - f(\omega_{\lambda+1})] \quad (\text{I. 2. 9})$$

Enthält die Menge der Extrempunkte von  $F^* - f$  eine Alternante der Länge  $l+1$ , dann alterniert sie definitionsgemäß  $l$ -mal.

Die Güte jeder Approximation wird durch das verwendete Approximationskriterium, die Norm, entscheidend mitbestimmt. Eine vorgeschriebene Sollkurve "möglichst gut" zu approximieren, heißt möglichst gut im Sinne der verwendeten Norm.

Im folgenden soll unter einer Tschebyscheff-Approximation eine Approximation verstanden werden, deren Ergebnis Minimallösung heißt und eindeutig charakterisierbar ist.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß eine Approximation, welche die  $L_{\infty}$  - oder Tschebyscheff-Norm verwendet, deshalb noch lange keine Tschebyscheff-Lösung liefern muß.

In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß mit dem Begriff Tschebyscheff-Approximation in der elektrotechnischen Literatur oft sehr unterschiedlich umgegangen wird. So wird bisweilen von einer Tschebyscheff-Approximation gesprochen, nur weil die Fehlerkurve eine gewisse Alternantenlänge hat. Eine Tschebyscheffsche Minimallösung ist nicht für jedes beliebige Funktionensystem durch eine Alternante einer bestimmten Länge gekennzeichnet. In [22] ist dieser Problembereich ausführlich behandelt für Betriebsphasen- und Betriebslaufzeit-Approximation einschließlich der zugehörigen Beweise. In [15] wurde die Tschebyscheff-Approximation von Betriebsdämpfungsverläufen untersucht.

Im weiteren werden ausschließlich Betriebsgrößen verwendet; daher soll einfachheitshalber nur von Dämpfung, Phase, Phasenlaufzeit und Gruppenlaufzeit die Rede sein.

Zusammenfassend gilt für Tschebyscheff-Approximationen:

Bei der Approximation von Phasen-, Phasenlaufzeit- und Dämpfungsvorschriften ist die beste Lösung, die sogenannte Minimallösung, vollständig durch eine Fehlerfunktion charakterisiert, deren Alternante die Mindestlänge  $n + 1$  hat. Dabei gibt  $n$  die Anzahl der Freiheitsgrade an.

Bei der Approximation von Gruppenlaufzeitvorschriften ist eine Fehlerfunktion mit der Alternantenlänge  $n + 1$  nicht zugleich notwendig und hinreichend für die Minimallösung.

Ir. [22] ist sogar der Satz aufgestellt und bewiesen, daß bei der Approximation von Gruppenlaufzeitvorschriften das Vorliegen einer Alternante der Länge  $2n + 1$  hinreichend für die Minimallösung ist. Es wird gleichzeitig zugegeben, daß es in den meisten Fällen prinzipiell unmöglich ist, eine Alternante der geforderten Länge zu erhalten.

Für die in der vorliegenden Arbeit u. a. interessierende Approximation von Gruppenlaufzeitvorschriften heißt das, daß man im allgemeinen keine Aussage darüber machen kann, ob eine Lösung Minimallösung ist. Deshalb kann es mehrere Lösungen mit teilweise gleicher Alternantenlänge geben, die sich durch ihre Güte unterscheiden.

Für die gleichzeitige Approximation von mehreren Vorschriften sind keine Kriterien bekannt, die eine Minimallösung charakterisieren. Auf Grund der in der Regel nicht eindeutig besten Approximation einer Gruppenlaufzeitvorschrift sind für die gleichzeitige Approximation auch mehrere Lösungen zu erwarten.

Numerische Beispiele in Teil II bestätigen, daß es bei der Approximation von Gruppenlaufzeitvorschriften für eine Vorschrift mehrere Lösungen geben kann, die sich durch die Güte, evtl. auch durch die Alternantenlänge unterscheiden. Teil III bringt überraschende Ergebnisse für die gleichzeitige Approximation von Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitvorschriften.

Nun soll auf die zu Beginn des zweiten Kapitels gestellten Fragen eingegangen werden.

In Punkt 1 ist die Wahl stark eingeeengt, da die Approximation im Frequenzbereich erfolgt. Die Wahl eines geeigneten Approximationskriteriums ist

strittig; für strenge Vorschriften wie zweiseitige Toleranzen empfiehlt sich die Tschebyscheff-Norm, während für eine bescheidenere Forderung das Fehlerquadratkriterium häufig Anwendung findet.

Die in diesem Kapitel schon behandelten Fragen 3 - 5 sind von großer Bedeutung für Punkt 6. Die weithin verbreitete falsche Annahme einer Tschebyschefflösung bei der Approximation von Gruppenlaufzeitvorschriften hat zur Konstruktion von Algorithmen geführt, die auf einer gewissen Alternantenlänge basieren. Die Länge dieser Alternante wurde mit  $n+1$  angenommen. Man kann deshalb vermuten, daß verschiedene Schwierigkeiten, die bei derartigen Approximationen auftreten, keine numerischen Gründe haben, sondern prinzipieller Natur sind.

Abschließend sei noch bemerkt, daß das Kriterium von Kolmogoroff unter den bisher bekannten Kriterien zur Charakterisierung von Minimallösungen den allgemeinsten Gültigkeitsbereich hat. Es ist stets hinreichend für eine Minimallösung, unabhängig davon, um welche Approximationsfunktionen es sich handelt. Die Anwendung dieses Kriteriums ist jedoch äußerst umständlich. Das Prüfen eines vorliegenden Approximationsergebnisses mit Hilfe des Kolmogoroff-Kriteriums darauf, ob es sich um die Minimallösung handelt, erweist sich meist als wesentlich schwieriger als die eigentliche Approximation.

In der hier vorgelegten Arbeit wird sowohl bei der Approximation von Gruppenlaufzeitvorschriften als auch bei der gleichzeitigen Approximation von Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitvorschriften eine Lösung angestrebt, deren Fehlerkurve bzw. Fehlerkurven eine möglichst lange Alternante besitzt. Die Randpunkte seien davon ausgenommen; an ihnen darf der Fehler kleiner als der Maximalfehler sein. Eine derartige Approximation soll gleichmäßig heißen.

Wie die Teile II und III zeigen, läßt sich in sehr vielen Fällen eine solche gleichmäßige Approximation erreichen.

### 3. Formulierung des Approximationsproblems

Zunächst seien einige Definitionen gegeben

$$\text{Dämpfung} \quad a(\omega) = -20 \cdot \lg |H(j\omega)| \text{ dB} \quad (\text{I. 3. 1})$$

$$\text{Phase} \quad b(\omega) = -\arg H(j\omega) \quad (\text{I. 3. 2})$$

$$\text{Phasenlaufzeit} \quad t_p(\omega) = \frac{b(\omega)}{\omega} \quad (\text{I. 3. 3})$$

$$\text{Gruppenlaufzeit} \quad t_G(\omega) = \frac{db(\omega)}{d\omega} \quad (\text{I. 3. 4})$$

Beim Entwurf elektrischer Netzwerke im Frequenzbereich können verschiedene Forderungen auftreten. Als Beispiel sei ein vorgeschriebener Dämpfungs-, Phasen-, Phasenlaufzeit- oder Gruppenlaufzeitverlauf genannt. Besonderes Interesse verdienen gleichzeitige Forderungen, wie sie durch Vorschrift von Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitverlauf oder Dämpfungs- und Phasenverlauf gegeben sind. Ferner sei die Approximation eines Ortskurvenstückes erwähnt, die auf eine gleichzeitige Approximation einer Realteil- und Imaginärteilvervorschrift hinausläuft.

In dieser Arbeit wird im Teil II die Approximation von Gruppenlaufzeitvorschriften sowie im Teil III die gleichzeitige Approximation von Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitvorschriften behandelt.

Zunächst wird die Aufgabe der Approximation von Gruppenlaufzeitvorschriften formuliert.

In einem Frequenzbereich  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$  seien eine stückweise stetige, beschränkte Gruppenlaufzeitvorschrift  $t_{GS}(\omega)$  und eine ebenfalls stückweise stetige, beschränkte Toleranz  $d_{TG}(\omega) > 0$  gegeben. Gesucht ist eine rationale, reelle und in der abgeschlossenen rechten  $p$ -Halbebene einschließlich  $p \rightarrow \infty$  polfreie Übertragungsfunktion  $H(p)$  eines Zweitores, so daß für dessen Gruppenlaufzeit  $t_G(\omega, \underline{x})$  mit  $\underline{x}$  als Parametervektor gilt:

$$|t_{G}(\omega, \underline{x}) - t_{GS}(\omega)| \leq d_{TG}(\omega) \quad \forall \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (\text{I. 3. 5})$$

Es interessiert meist nur der Gruppenlaufzeitverlauf bis auf eine frei wählbare, additive Konstante  $t_0$ , die Gruppenlaufzeitkonstante, um die man sich die Vorschrift verschoben denken kann. Bild I. 1 zeigt ein Beispiel einer Gruppenlaufzeitvorschrift, die in diesem Fall nur durch ihre zulässige Toleranz gegeben ist.

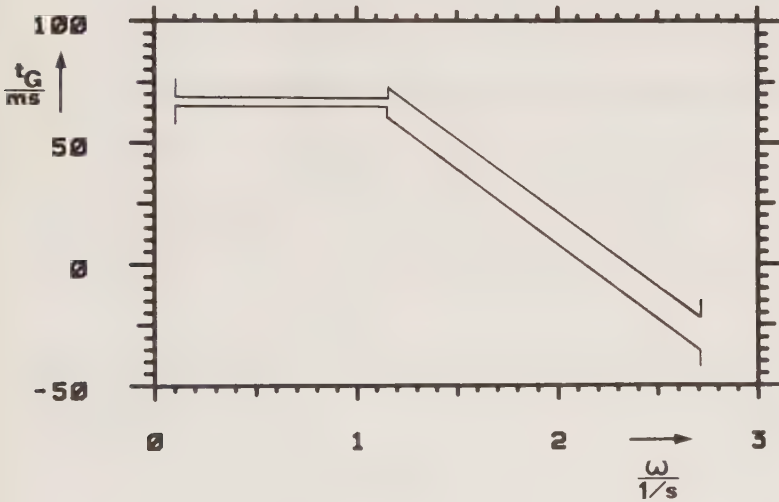


Bild I. 1: Beispiel einer Gruppenlaufzeitvorschrift

Die Aufgabe der gleichzeitigen Approximation von Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitvorschriften ist im folgenden dargestellt:

In einem Frequenzbereich  $\omega_{1D} \leq \omega \leq \omega_{2D}$  seien eine stückweise stetige, beschränkte Dämpfungsvorschrift  $a_S(\omega)$  und eine ebenfalls stückweise stetige, beschränkte Toleranz  $d_a(\omega) > 0$  gegeben.

In einem Frequenzbereich  $\omega_{1G} \leq \omega \leq \omega_{2G}$  seien eine stückweise stetige, beschränkte Gruppenlaufzeitvorschrift  $t_{GS}(\omega)$  und eine ebenfalls stückweise stetige, beschränkte Toleranz  $d_{TG}(\omega) > 0$  gegeben.

Gesucht ist eine rationale, reelle und in der abgeschlossenen rechten  $p$  - Halbebene einschließlich  $p \rightarrow \infty$  polfreie Übertragungsfunktion  $H(p)$  eines Zweitores, so daß für dessen Dämpfung  $a(\omega, \underline{x})$  die Forderung

$$|a(\omega, \underline{x}) - a_S(\omega)| \leq d_a(\omega) \quad \forall \omega \in [\omega_{1D}, \omega_{2D}] \quad (I. 3. 6)$$

und gleichzeitig für dessen Gruppenlaufzeit  $t_G(\omega, \underline{x})$  die Forderung

$$|t_G(\omega, \underline{x}) - t_{GS}(\omega)| \leq d_{TG}(\omega) \quad \forall \omega \in [\omega_{1G}, \omega_{2G}] \quad (I. 3. 7)$$

gilt. Der Gruppenlaufzeitverlauf ist meist bis auf eine frei wählbare, additive Konstante  $t_0$ , die Gruppenlaufzeitkonstante, vorgeschrieben.

An die Dämpfung können zusätzlich noch einseitige Forderungen folgender Art gestellt werden:

$$a(\omega_k) < a_N(\omega_k) \quad k = 1, 2, \dots, M_a \quad (\text{Maximaldämpfung}) \quad (I. 3. 8)$$

$$a(\omega_k) > a_N(\omega_k) \quad k = 1, 2, \dots, M_i \quad (\text{Mindestdämpfung}) \quad (I. 3. 9)$$

Bild I. 2 zeigt neben den bei einer gleichzeitigen Approximation auftretenden Vorschriften zusätzlich noch eine einseitige Dämpfungsforderung.

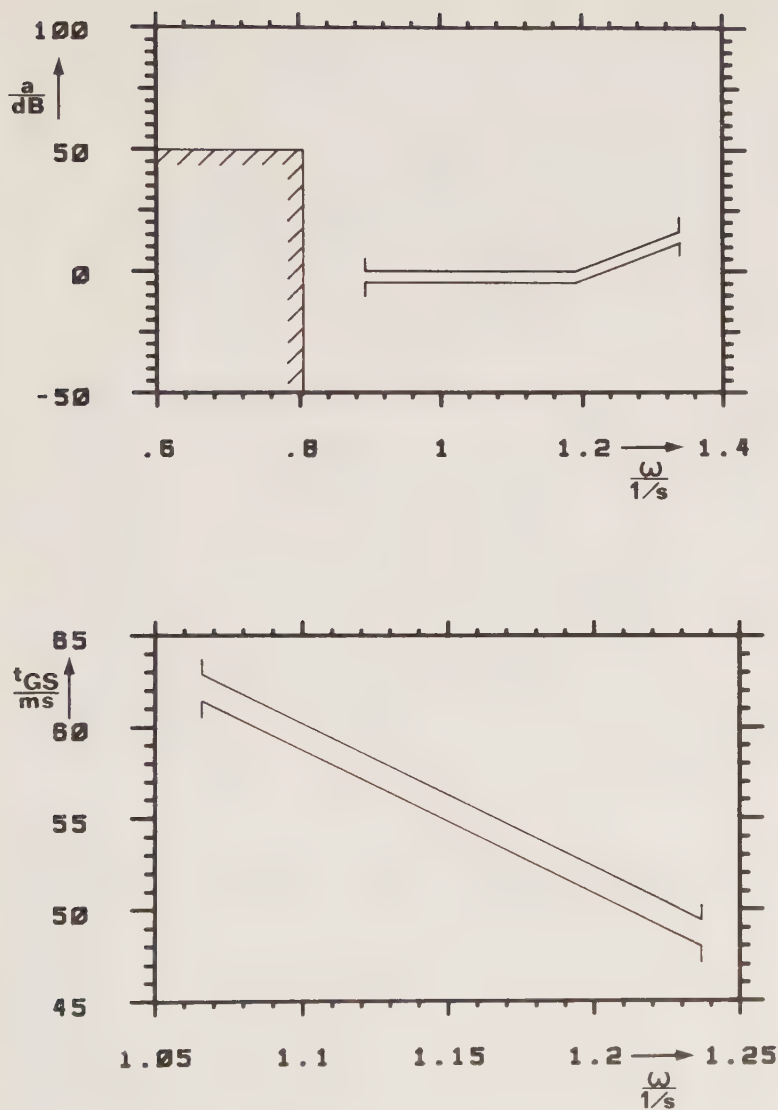


Bild I.2: Beispiel einer Vorschrift für die gleichzeitige Approximation

#### 4. Parameterstruktur

Häufig spielt die numerische Kondition bei Approximationsproblemen die entscheidende Rolle. In diesem Zusammenhang ist vor allem die Wahl einer geeigneten Parameterstruktur wichtig.

Gruppenlaufzeit und Dämpfung lassen sich aus  $H(p)$ , einer rationalen Funktion, bestimmen. Diese kann man auf verschiedene Weise darstellen, z. B. in Pol-Nullstellen-, Koeffizienten- und Pol-Residuen-Form, ferner als Laurent-Reihe oder Kettenbruch.

Bei Approximationsproblemen wird meist nur die Koeffizienten- oder die Pol-Nullstellenform verwendet.

Eine rationale Funktion  $F(p)$  ist in Koeffizientenform als

$$F(p) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i \cdot p^i}{\sum_{j=0}^m b_j \cdot p^j} \quad , \quad (\text{I. 4. 1})$$

in Pol-Nullstellenform als

$$F(p) = \frac{a_n \cdot \prod_{i=1}^n (p - p_{oi})}{b_m \cdot \prod_{j=1}^m (p - p_{\infty j})} \quad (\text{I. 4. 2})$$

darstellbar.

Als Vorteile der Pol-Nullstellenform gegenüber der Koeffizientendarstellung sind zu nennen:

- a) Leichtere Interpretierbarkeit einer gefundenen Lösung (z. B. bezüglich Stabilitätsreserve)
- b) Nebenbedingungen wie eingeschränkter Variationsbereich der

Parameter lassen sich viel leichter berücksichtigen und ihre Einhaltung ist erheblich einfacher zu kontrollieren.

- c) Im allgemeinen ist die numerische Kondition wesentlich besser [30].
- d) Für eine bestimmte Realisierung kann man die geeignete Pol-Nullstellen-Struktur wählen (z. B. Nullstellen nur auf der imaginären Achse der  $p$ -Ebene für LC-Realisierung).
- e) Die Stabilität von  $H(p)$  läßt sich mittels Parametertransformation leicht erzwingen.

Diesen Vorteilen der Pol-Nullstellenform steht jedoch vor allem ein Nachteil gegenüber:

Man ist von vorneherein gezwungen, sich auf eine bestimmte Pol-Nullstellen-Struktur festzulegen, die für ein vorliegendes Problem nicht die günstigste sein muß. So kann es beispielsweise vorkommen, daß man statt komplexer Pole besser reelle gewählt hätte. Ein solcher Übergang ist jedoch während der Approximation nicht mehr möglich. Bei der Koeffizientendarstellung dagegen gehen komplexe Pole und Nullstellen in reelle und umgekehrt ohne Schwierigkeit ineinander über, wenn sich dies während des Approximationsprozesses als günstig erweist.

Für die gleichzeitige Approximation von Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitvorschriften scheidet die Koeffizientendarstellung von vorneherein aus, da sich die Stabilität der Übertragungsfunktion  $H(p)$  in dieser Form nicht erzwingen läßt. Davon abgesehen überwiegen die Vorteile der Pol-Nullstellendarstellung erheblich. Für den hier behandelten Problemkreis wird  $H(p)$  deshalb in dieser Form dargestellt.

## 5. Approximation mit Hilfe von Optimierung

Wie in den Teilen II und III noch ausführlicher gezeigt ist, wird für die hier behandelten Approximationsprobleme ein Optimierungsverfahren im Rahmen eines Algorithmus benötigt. Bei dem in [31] durchgeführten Vergleich ver-

schiedener Optimierungsverfahren hat das in [9] ausführlich dargestellte und in dieser Arbeit verwendete Verfahren am besten abgeschnitten. Einige grundsätzliche, bei der Optimierung auftretende Probleme sollen nun kurz skizziert werden.

Bild I. 3 zeigt eine Vorschrift  $V(\omega)$ , die punktweise gegeben ist, sowie eine Näherungslösung  $N(\omega, \underline{x})$ .

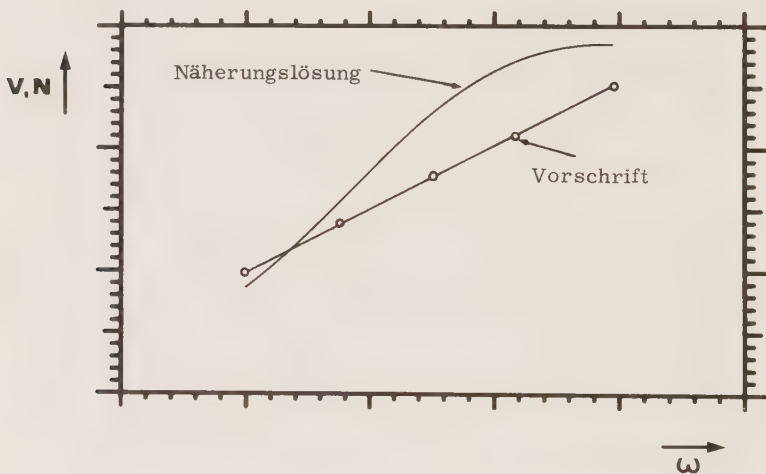


Bild I. 3: Vorschrift mit Näherungslösung

Bild I. 4 zeigt den Fehler an den einzelnen Stützstellen.

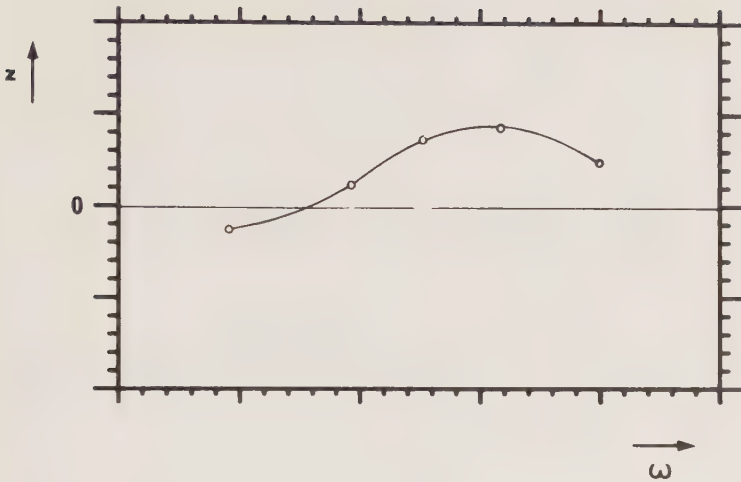


Bild I. 4: Fehler

Er soll durch den Vektor  $\underline{z}(\underline{x})$  beschrieben werden.

$Z(\underline{x})$  habe die Form einer Fehlerquadratsumme

$$Z(\underline{x}) = \sum_{i=1}^m z_i^2(\underline{x}) \quad . \quad (\text{I. 5. 1})$$

Die Anzahl der Stützstellen ist mit  $m$ , der aus  $n$  Komponenten bestehende Parametervektor mit  $\underline{x}$  bezeichnet.  $\underline{x}$  soll nun so variiert werden, daß die Fehlerquadratsumme  $Z(\underline{x})$  minimal wird.  $Z(\underline{x})$  läßt sich auch als

$$Z(\underline{x}) = \underline{z}^T(\underline{x}) \cdot \underline{z}(\underline{x}) \quad (\text{I. 5. 2.})$$

mit dem Vektor

$$\underline{z}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} z_1(\underline{x}) \\ z_2(\underline{x}) \\ \vdots \\ z_m(\underline{x}) \end{bmatrix} \quad (\text{I. 5. 3})$$

angeben.

Der Fehlervektor  $\underline{z}(\underline{x})$  wird nun durch eine Taylorreihenentwicklung im Punkt  $\underline{x}_0$  beschrieben:

$$z(\underline{x}_0 + \Delta \underline{x}) = z(\underline{x}_0) + \underline{J}(\underline{x}_0) \cdot \Delta \underline{x} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \underline{x}^T \cdot \underline{G}_1(\underline{x}_0) \Delta \underline{x} \\ \Delta \underline{x}^T \cdot \underline{G}_2(\underline{x}_0) \Delta \underline{x} \\ \vdots \\ \Delta \underline{x}^T \cdot \underline{G}_m(\underline{x}_0) \Delta \underline{x} \end{bmatrix} + \dots \quad (\text{I. 5. 4})$$

$\Delta \underline{x}$  kennzeichnet die Umgebung des Punktes  $\underline{x}_0$ ,

$$\underline{J}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial z_m}{\partial x_1} & \frac{\partial z_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial z_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{I. 5. 5})$$

die Jacobi-Matrix des Vektors  $\underline{z}(\underline{x})$ ,

$$\mathbf{G}_i(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (\text{I. 5. 6})$$

die Hessesche Matrix für die Funktion  $z_i(\underline{x})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Diese Taylorreihenentwicklung wird nach dem linearen Term abgebrochen, so daß nun gilt:

$$z(\underline{x}_0 + \Delta \underline{x}) \approx z(\underline{x}_0) + \mathbf{J}(\underline{x}_0) \cdot \Delta \underline{x} \quad (\text{I. 5. 7})$$

Die Dimension des Parametervektors wird im allgemeinen größer sein als die Anzahl der Stützstellen. Für die Lösung von  $\Delta \underline{x}$  stellt (I. 5. 7) ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem dar, das nicht exakt lösbar ist. Man kann nur im Sinne einer Norm, wie z. B. der Fehlerquadratnorm, eine "beste" Lösung finden, so daß  $\|\underline{z}(\underline{x}_0) + \mathbf{J}(\underline{x}_0) \cdot \Delta \underline{x}\|_2$  ein Minimum wird. Dann lautet die Lösung für  $\Delta \underline{x}$ :

$$\Delta \underline{x} = - [\mathbf{J}^T(\underline{x}_0) \cdot \mathbf{J}(\underline{x}_0)]^{-1} \cdot \mathbf{J}^T(\underline{x}_0) \cdot \underline{z}(\underline{x}_0) \quad (\text{I. 5. 8})$$

Schwierigkeiten ergeben sich, wenn die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}(\underline{x}_0)$  einen Rangabfall an der Stelle  $\underline{x}_0$  hat, da dann bekannterweise die in (I. 5. 8) zu bildende Inverse nicht existiert. Aber auch für den Fall, daß die Matrix  $\mathbf{J}(\underline{x}_0)$  fast singulär wird, treten Schwierigkeiten auf. Lösungsmöglichkeiten für derartige Probleme sind in [9] ausführlich dargestellt.

Es sei ausdrücklich betont, daß die in (I. 5. 7) gemachte Näherung nur in einer Umgebung von der Lösung gültig ist. Schlechte Startlösungen können folglich das Verfahren scheitern lassen.

## 6. Allgemeine Gesichtspunkte für die Entwicklung von Computer-Programmen

Bevor in den nächsten Abschnitten auf die Approximationsprobleme und die zur Lösung verwendeten Algorithmen im einzelnen eingegangen wird, soll noch kurz auf einige Punkte hingewiesen werden, die beim Erstellen von Computer-Programmen beachtet werden sollten.

### a) Zahlendarstellung

Die verwendeten Algorithmen sollten mit einer möglichst kurzen Zahlendarstellung auskommen, was eine gegen Rundungsfehler etc. unempfindliche Darstellung erfordert. Denn dadurch kann man nicht nur erheblich Rechenzeit sparen (das Rechnen mit doppelter Genauigkeit erhöht die Rechenzeit ganz beträchtlich, vom erhöhten Speicherbedarf abgesehen), sondern Approximationsprobleme möglicherweise auch auf Kleinrechnern lösen, die im allgemeinen nur über eine relativ kurze Zahlendarstellung verfügen.

### b) Ein- und Ausgabe

Die Eingabe sollte möglichst einfach sein, wofür sich die formatfreie Eingabe besonders eignet. Sämtliche eingelesenen Daten sollten in übersichtlicher Form mit entsprechendem Begleittext sofort wieder ausgegeben werden, damit evtl. falsch eingegebene Werte rasch gefunden werden können. Ferner empfiehlt es sich, die Eingabedaten auf zu großen Umfang, z. B. zu viele Stützstellen, zu überprüfen, um sofort mittels Fehlermeldung und Abbruch der Berechnung Eingabefehler erkennen zu können.

Die Ausgabe sollte in möglichst leicht verständlicher Form erfolgen und genügend kommentiert sein. Ferner sollten die Ausgabedaten,

die das erreichte Ergebnis darstellen, auch in einer Form ausgegeben werden können, welche die Weiterverwendung ermöglicht.

c) Fehlerdiagnose

Beim Entwickeln eines neuen Programms sollte man zumindest in der Anfangsphase von den Fehlerdiagnosemöglichkeiten Gebrauch machen, die der jeweilige Rechner zur Verfügung stellt. Als Beispiel sei die dynamische Kontrolle genannt, die u. a. überprüft, ob Variable undefiniert sind und ob Feldgrenzen überschritten worden sind. Ein weiterer Punkt, der die Fehlersuche sehr erleichtern kann, ist das Anhalten des Programms an beliebigen Punkten in Verbindung mit der Ausgabe und evtl. Änderung einzelner Variabler.

d) Speicherbedarf, Geschwindigkeit

Während der Speicherbedarf häufig nur bei Kleinrechnern Schwierigkeiten machen kann, bringt ein nicht auf Geschwindigkeit ausgeichtetes Programm an jeder Anlage teilweise erhebliche Nachteile, seien sie nun in den Kosten oder in der Wartezeit begründet. Diese spielt beim Dialogbetrieb eine große Rolle.

e) Übersichtlichkeit

Es ist günstig, ein umfangreiches Programm in mehrere Blöcke aufzuteilen, wenn die einzelnen Blöcke mehrfach verwendet werden können. Die Schnittstellen dieser Blöcke, an denen der Austausch der Ein- und Ausgabedaten erfolgt, sollten so übersichtlich wie möglich ausgeführt werden, um evtl. nachträglich gewünschte Änderungen problemlos durchführen zu können. Ferner sei auf die Erleichterung einer Segmentierung hingewiesen, die eine Blockstruktur voraussetzt.

f) Verzicht auf rechnerspezifische Besonderheiten

Um erstellte Programme auch auf anderen Rechenanlagen verwenden zu können, sollte man auf die speziellen Eigenschaften eines bestimmten Rechnertyps verzichten. Die Verwendung von ANSI - For-

tran gewährleistet in der Regel die problemlose Umstellung eines Programms.

## II. APPROXIMATION DES GRUPPENLAUFZEITVERLAUFS

### 1. Zweck

Der zunehmende Einsatz von Großrechnern und die damit verbundene Übertragung von Daten auch über große Entfernungen erfordern Netzwerke, welche die auf dem Übertragungsweg entstehenden Verzerrungen beseitigen. Neben der Dämpfungsentzerrung schenkt man deshalb auch der Phasen- bzw. der Gruppenlaufzeitentzerrung immer mehr Beachtung. Besondere Schwierigkeiten treten bei der Verwendung des Fernsprechnetzes zur schnellen Datenübertragung auf. Denn das Telefonnetz ist schließlich nicht für diesen Zweck ausgelegt, sondern nur im Hinblick auf Dämpfungseigenschaften; als Beispiel sei die Verwendung von Pupinkabeln genannt.

Auch für die Impulsformung werden Netzwerke zur Gruppenlaufzeitentzerrung eingesetzt. Derartige Entzerrer dienen etwa zur Verzögerung, Kompression oder Dilatation von Impulsen.

### 2. Verwendung von Allpässen, Parametertransformation zur Stabilitäts-sicherung

Die Aufgabe der Gruppenlaufzeitentzerrung läßt sich folgendermaßen definieren:

In einem Frequenzbereich  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$  ist eine stetige Funktion  $t_{GS}(\omega)$  gegeben, die durch die Gruppenlaufzeitfunktion eines oder mehrerer in Kette geschalteter Elementarallpässe zu approximieren ist.

Im allgemeinen ist der Gruppenlaufzeitverlauf nur bis auf eine willkürliche Konstante vorgeschrieben.

Die Approximation des Gruppenlaufzeitverlaufs erfolgt durch Allpässe. Das sind Zweitore, deren Übertragungsfunktion gegeben ist als

$$H(p) = \frac{h(-p)}{h(p)} \quad . \quad (\text{II. 2. 1})$$

Dabei ist  $h(p)$  ein Hurwitz-Polynom.

Unter Verwendung von (I. 3. 2) und (I. 3. 4) ergibt sich:

$$t_G = 2 \cdot \frac{d}{d\omega} \{ \arg h(j\omega) \} \quad . \quad (\text{II. 2. 2})$$

$H(p)$  in (II. 2. 1) ist die Übertragungsfunktion der Kettenschaltung von  $m+n$  Elementarallpässen. Durch Überlagerung der Gruppenlaufzeiten der einzelnen Elementarallpaßglieder erhält man die gesamte Gruppenlaufzeit.

Die Übertragungsfunktion eines Elementarallpässes 1. Grades ist gegeben als:

$$H(p) = \frac{h(-p)}{h(p)} = \frac{-p+\alpha}{p+\alpha} \quad . \quad (\text{II. 2. 3})$$

Als zugehörige Gruppenlaufzeitfunktion ergibt sich:

$$t_G(\omega) = 2 \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad . \quad (\text{II. 2. 4})$$

Wie man aus Gleichung (II. 2. 3) erkennen kann, ist  $h(p)$  nur für  $\alpha > 0$  ein Hurwitzpolynom. Solche Einschränkungen sind bei der Verwendung von Optimierungsverfahren äußerst störend. Es wird deshalb (II. 2. 3) der Parametertransformation

$$\alpha = a^2 \quad (\text{II. 2. 5})$$

unterworfen, so daß für den neuen Parameter  $a$  keinerlei Einschränkungen mehr bestehen. An Stelle von (II. 2. 3) und (II. 2. 4) erhält man nun

$$H(p) = \frac{-p + a^2}{p + a^2} \quad (\text{II. 2. 6})$$

sowie

$$t_G(\omega) = 2 \cdot \frac{a^2}{a^4 + \omega^2} \quad (\text{II. 2. 7})$$

Die Übertragungsfunktion eines Elementarallpasses 2. Grades ist gegeben als:

$$H(p) = \frac{h(-p)}{h(p)} = \frac{(-p + b^2)^2 + c^2}{(p + b^2)^2 + c^2} \quad (\text{II. 2. 8})$$

Als zugehörige Gruppenlaufzeit erhält man:

$$t_G(\omega) = 4b^2 \cdot \frac{\omega^2 + b^4 + c^2}{\omega^4 + \omega^2 \cdot (2b^4 - 2c^2) + b^8 + c^4 + 2b^4c^2} \quad (\text{II. 2. 9})$$

Wie aus (II. 2. 8) ersichtlich ist, wurde hier eine (II. 2. 5) entsprechende Parametertransformation verwendet.

Spaltet man die in (II. 2. 1) gegebene Übertragungsfunktion in das Produkt der Übertragungsfunktionen von Elementarallpässen auf, dann ergibt sich die gesamte Gruppenlaufzeit zu:

$$t_G(\omega) = 2 \cdot \sum_{i=1}^m \frac{a_i^2}{a_i^4 + \omega^2} + 4 \cdot \sum_{i=m+1}^{m+n} b_i^2 \cdot \frac{\omega^2 + b_i^4 + c_i^2}{\omega^4 + \omega^2 \cdot (2b_i^4 - 2c_i^2) + b_i^8 + c_i^4 + 2b_i^4c_i^2} \quad (\text{II. 2. 10})$$

Die Anzahl der Allpässe 1. Grades beträgt m, die Anzahl der Allpässe 2. Grades n. Die Bedeutung der verwendeten Parameter  $a_i$ ,  $b_i$  und  $c_i$  wird im Kapitel 5 erklärt.

### 3. Startwertproblem, Gewinnung von Ausgangsnäherungen, Fehlersymmetrierung

Bei der Approximation spielen die Ausgangsnäherungen eine wichtige Rolle, denn sie werden als Startwerte der nachfolgenden Optimierung verwendet. Die Empfindlichkeit des Optimierungsverfahrens gegenüber schlechten Startwerten hängt stark vom jeweils vorliegenden Approximationsproblem ab. Bei der Approximation des Dämpfungsverlaufs ergeben sich andere Verhältnisse als bei der Approximation des Gruppenlaufzeitverlaufs oder der gleichzeitigen Approximation des Gruppenlaufzeit- und Dämpfungsverlaufs.

Beim Auffinden geeigneter Startwerte für die Approximation von Gruppenlaufzeitvorschriften muß man sich zuerst überlegen, mit welchem Grad die Approximation erfolgen soll. Ein Hilfsmittel hierzu, das auch zur Startwertbestimmung verwendet werden kann, ist im folgenden skizziert.

Der Gruppenlaufzeitverlauf eines Elementarallpasses 1. Grades ist aus Bild II. 1 ersichtlich, Bild II. 2 zeigt den Verlauf für einen Elementarallpaß 2. Grades.

Die schraffierte Fläche im Bild II. 1 ist

$$F = 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{a^2}{4 + \omega^2} d\omega = \pi, \quad (\text{II. 3. 1})$$

das Maximum hat den Wert

$$t_G(0) = \frac{2}{a} \quad (\text{II. 3. 2})$$

Die schraffierte Fläche im Bild II. 2 ist

$$F = 4b^2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 + b^4 + c^2}{\omega^4 + \omega^2 \cdot (2b^4 - 2c^2) + b^8 + c^4 + 2b^4c^2} d\omega = 2\pi \quad (\text{II. 3. 3})$$

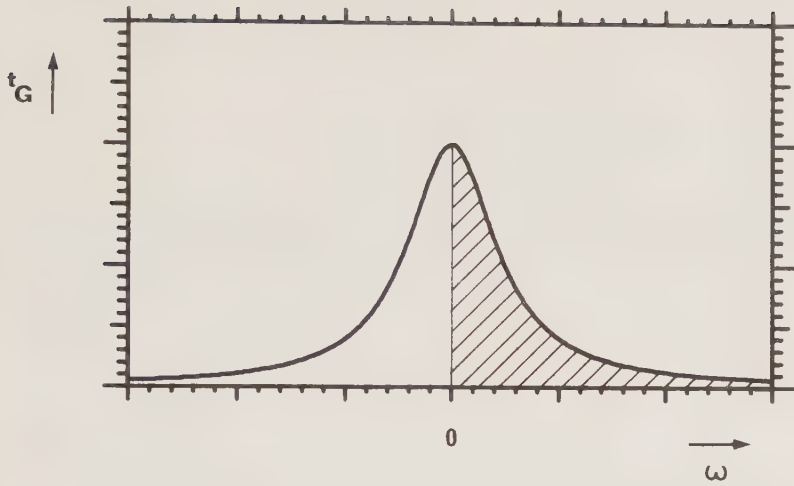


Bild II. 1: Gruppenlaufzeitverlauf eines Elementarallpasses 1. Grades

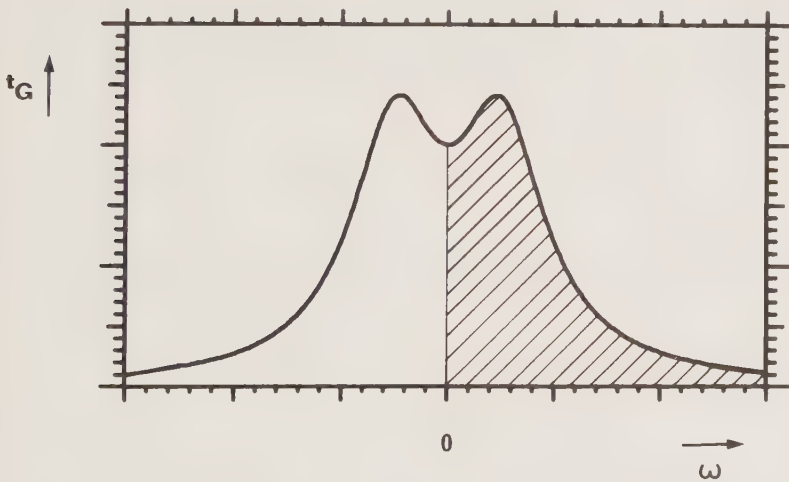


Bild II. 2: Gruppenlaufzeitverlauf eines Elementarallpasses 2. Grades

Das für  $\omega \geq 0$  auftretende Maximum hat den Wert

$$t_G^{(\omega_m)} = \frac{b^2}{c \cdot (\sqrt{b^4 + c^2} - c)} \quad (\text{II. 3. 4})$$

Man kann bei einer Gruppenlaufzeitvorschrift  $t_{GS}(\omega)$  die Fläche, welche  $t_{GS}(\omega)$  von  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$  mit der positiven  $\omega$ -Achse einschließt, graphisch abschätzen. Betrachtet man den vorgeschriebenen Gruppenlaufzeitverlauf, dann kann man feststellen, wie groß die "aufzufüllende" Fläche ist. Bild II. 3 zeigt als Vorschrift eine in einem gewissen Frequenzbereich linear ansteigende Gruppenlaufzeit.

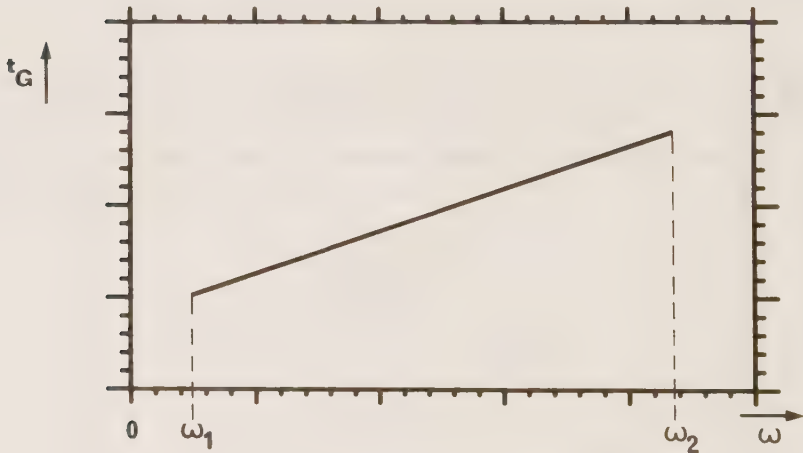


Bild II. 3: Gruppenlaufzeitvorschrift

Die Fläche, welche die Kurve im Bereich  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$  mit der positiven  $\omega$ -Achse einschließt, läßt sich einfach berechnen. Daraus kann man abschätzen, mit welchem Grad die Approximation zu erfolgen hat.

Mit Hilfe von (II. 3. 2) und (II. 3. 4) lassen sich auch Anfangswerte für die Approximation gewinnen. Diese so ermittelten Werte müssen natürlich nicht schon eine Mindestanzahl alternierender Extrema besitzen. Die Erfahrung hat jedoch gezeigt, daß ein möglichst "unmonotones" Verhalten der Fehlerkurve das Auffinden einer brauchbaren Lösung erleichtert. Ein anderer Weg, zu einigermaßen brauchbaren Anfangslösungen zu gelangen, besteht darin, daß man an einem Tischrechner mit angeschlossenem Plotter einige Parameterwerte durchprobiert, bis die Anfangsnäherung eine wenigstens gewisse Ähnlichkeit mit der Vorschrift besitzt. Da die Gruppenlaufzeitvorschrift meist nur bis auf eine beliebige Konstante  $t_0$ , die Gruppenlaufzeitkonstante, vorgeschrieben ist, lassen sich (II. 2. 4), (II. 2. 7) und (II. 2. 9) um  $-t_0$  erweitern. Diese frei wählbare, additive Konstante kann man zunächst für die Startlösung dazu verwenden, die Extrema der Fehlerfunktion zu symmetrieren, indem man  $t_0$  so berechnet, daß der maximale positive Fehler und der maximale negative Fehler betragsgleich sind. Die Approximation wird dadurch erleichtert.

#### 4. Wahl geeigneter Fehlerkriterien

Zu den wohl am meisten verwendeten Fehlerkriterien zählt das Fehlerquadratsummenkriterium, die  $L_2$ -Norm, auch Methode der kleinsten Fehlerquadrate genannt. Gemäß (I. 5. 1) soll

$$Z(\underline{x}) = \sum_{i=1}^m z_i^2(\underline{x}) \quad (\text{I. 5. 1})$$

zum Minimum gemacht werden, wobei  $z_i(\underline{x})$  der Fehler an der  $i$ . Stützstelle ist. Der Vorteil dieses Kriteriums liegt in der leichten Anwendbarkeit und der

im allgemeinen günstigen numerischen Kondition, da auch die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}(\underline{x})$  stetig differenzierbar ist — eine für manche Optimierungsverfahren wichtige Voraussetzung.

Ein Nachteil der geschilderten Methode ist der ungleichmäßige Fehlerverlauf der berechneten Lösung. So kann die Fehlerkurve an einigen, wenigen Punkten sehr große Werte annehmen, während sie an den übrigen Punkten oft einen flachen Verlauf zeigt. Für eine ganze Reihe technischer Forderungen wie z. B. Gruppenlaufzeitvorschrift mit zweiseitigem Toleranzschema ist die Methode der kleinsten Fehlerquadrate deshalb nur bedingt geeignet. Sie erscheint dann zweckmäßig, wenn man beim ersten Optimierungsschritt aus recht schlechten Startwerten brauchbarere erhalten möchte. Häufig gelingt es durch Minimierung der Fehlerquadratsumme, die Parameter so zu variieren, daß die nun erhaltene Fehlerkurve erheblich mehr alternierende Extrema als vorher hat. Das wiederum begünstigt eine nachfolgende Optimierung mit Hilfe der Tschebyscheff-Norm.

Wenn die Fehlerkurve einen gleichmäßigen Verlauf haben soll, empfiehlt es sich, die Tschebyscheff-Norm zu verwenden. Sie fordert, daß alle Extrema der Fehlerkurve betragsmäßig unterhalb einer gewissen Schranke  $d_{TG}(\omega)$  liegen. Gerade bei einer zweiseitigen Vorschrift, bei der

$$|t_G(\omega, \underline{x}) - t_{GS}(\omega)| \leq d_{TG}(\omega) \quad \forall \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (\text{II.4.1})$$

gilt, ist die Verwendung der Tschebyscheff-Norm zweckmäßig, was Beispiele in späteren Kapiteln belegen.

## 5. Freiheitsgrade für die Optimierung

Bevor im Kapitel 6 auf den eigentlichen Approximationsprozeß mit Hilfe eines

Optimierungsverfahrens eingegangen wird, sollen in diesem Kapitel die zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade für die Optimierung behandelt werden.

Die Approximation des Gruppenlaufzeitverlaufs erfolgt durch Allpässe 1. und 2. Grades. Unter Verwendung von (II. 2. 7) gilt für einen Elementarallpaß 1. Grades:

$$t_G(\omega) = 2 \cdot \frac{a^2}{4 + \omega^2} - t_0 \quad (\text{II. 5. 1})$$

Im allgemeinen ist der Gruppenlaufzeitverlauf, wie bereits erwähnt, nur bis auf die frei wählbare Gruppenlaufzeitkonstante  $t_0$  vorgeschrieben.  $a^2$  ist der Realteil der reellen Nullstelle von  $H(p)$  von (II. 2. 6). Ein Elementarallpaß 1. Grades hat also zwei variierbare Parameter, nämlich  $a$  und  $t_0$ . Bei Verwendung von  $m$  Allpässen 1. Grades ergibt sich aus (II. 5. 1)

$$t_G(\omega) = 2 \cdot \sum_{i=1}^m \frac{a_i^2}{4 + \omega^2} - t_0 \quad (\text{II. 5. 2})$$

Es stehen also  $m+1$  frei variierbare Parameter zur Verfügung, die keinerlei Einschränkungen unterworfen sind und über die das verwendete Optimierungsverfahren voll verfügen darf.

Als Parametervektor  $\underline{x}$  erhält man

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ t_0 \end{bmatrix} \quad (\text{II. 5. 3})$$

Für die Approximation des Gruppenlaufzeitverlaufs mit Elementarallpässen 2. Grades gilt analog für einen Elementarallpaß 2. Grades:

$$t_G(\omega) = 4b^2 \cdot \frac{\omega^2 + b^4 + c^2}{\omega^4 + \omega^2 \cdot (2b^4 - 2c^2) + b^8 + c^4 + 2b^4 c^2} - t_0 \quad (\text{II. 5. 4})$$

$b^2$  ist der Realteil der Nullstelle von  $H(p)$  von (II. 2. 8),  $c$  der zugehörige Imaginärteil. Die frei variierbaren Parameter sind also  $b$ ,  $c$  und  $t_0$ .

Bei Kettenschaltung von  $n$  Allpässen 2. Grades erhält man aus (II. 5. 4)

$$t_G(\omega) = 4 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \cdot \frac{\omega^2 + b_i^4 + c_i^2}{\omega^4 + \omega^2 \cdot (2b_i^4 - 2c_i^2) + b_i^8 + c_i^4 + 2b_i^4 c_i^2} - t_0 \quad (\text{II. 5. 5})$$

Die bei der Optimierung verwendeten frei wählbaren Parameter  $b_i$ ,  $c_i$  und  $t_0$  lassen sich zum Parametervektor

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ b_2 \\ c_2 \\ \vdots \\ b_n \\ c_n \\ t_0 \end{bmatrix} \quad (\text{II. 5. 6})$$

zusammenfassen.

Selbstverständlich lassen sich auch Allpässe 1. und 2. Grades miteinander kombinieren, was dann zu einem entsprechend geänderten Parametervektor führt.

## 6. Approximation des Gruppenlaufzeitverlaufs mit Hilfe eines Optimierungsverfahrens sowie entsprechender Fehlergewichtung

Das hier beschriebene Verfahren der Approximation des Gruppenlaufzeitverlaufs mit Hilfe eines Optimierungsverfahrens sowie einer entsprechenden Fehlergewichtung besteht aus zwei Teilen, deren äußerer einer modifizierten Intervallschachtelung [14] entspricht, während der innere aus einer Folge von Optimierungsschritten besteht.

Das Vorgehen sei vorerst nur kurz beschrieben:

Im äußeren Teil wird eine Fehlerfunktion jeweils neu definiert, während im inneren Teil die so gebildete Fehlerquadratsumme mit Hilfe eines Optimierungsverfahrens minimiert wird.

Zunächst wird eine toleranz-normierte Fehlerfunktion  $f(\omega, \underline{x})$  definiert:

$$f(\omega, \underline{x}) := \frac{t_G(\omega, \underline{x}) - t_{GS}(\omega)}{d_{TG}(\omega)} \quad (\text{II. 6. 1})$$

$d_{TG}(\omega)$  sei eine zugelassene zweiseitige Toleranz, die für die Vorschrift  $t_{GS}(\omega)$  existiert; so können Vorschrift und Toleranz beispielsweise lauten:

$$\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \quad : \quad t_{GS}(\omega) = 1 \text{ ms} - 0,5 \cdot \left( \frac{1}{\omega} - 2 \text{ ms} \right)$$

$$\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \quad : \quad d_{TG}(\omega) = \pm 0,1 \text{ ms}$$

Wenn die Fehlerfunktion also den Maximalwert 1 hat, bedeutet dies, daß die Vorschrift gerade noch erfüllt ist. Die Verwendung einer toleranz-normierten Fehlerfunktion anstatt einer unnormierten hat den Vorteil, daß man auf einen Blick sehen kann, in welchem Maße die jeweilige Vorschrift übererfüllt oder auch verletzt ist, unabhängig vom Toleranzwert des betrachteten Problems.

Am Ende der Approximation kann es zweckmäßig sein, den toleranz-normierten Fehler wieder in den absoluten umzurechnen.

Aus der toleranz-normierten Fehlerfunktion  $f(\omega, \underline{x})$  wird nun die gewichtete Fehlerfunktion  $g(\omega, \underline{x}, \gamma)$  gebildet:

$$g(\omega, \underline{x}, \gamma) = \begin{cases} f(\omega, \underline{x}) - \gamma, & \text{falls } f(\omega, \underline{x}) > \gamma \\ 0, & \text{" } |f(\omega, \underline{x})| \leq \gamma \\ f(\omega, \underline{x}) + \gamma, & \text{" } f(\omega, \underline{x}) < -\gamma \end{cases} \quad (\text{II. 6. 2})$$

Der Parameter  $\gamma > 0$  bedeutet dabei die Gewichtsschranke. Falls der (ungewichtete) Fehler an einer Stützstelle  $\omega_i$  kleiner ist als die Gewichtsschranke  $\gamma$ , bleibt er unberücksichtigt, wird also gleich 0 gesetzt. Die Fehler, deren Beträge größer sind als  $\gamma$ , werden betragsmäßig um  $\gamma$  vermindert.

Nun wird die Fehlerquadratsumme  $\text{FQS}(\underline{x}, \gamma)$  definiert:

$$\text{FQS}(\underline{x}, \gamma) := \sum_{i=1}^s g^2(\omega_i, \underline{x}, \gamma) \quad (\text{II. 6. 3})$$

$s$  ist die Anzahl der Stützstellen.

Zwei wichtige Eigenschaften der Funktion  $\text{FQS}(\underline{x}, \gamma)$  sind:

- a)  $\text{FQS}(\underline{x}, \gamma)$  ist nach den Parametern  $\underline{x}$  zweimal differenzierbar. Die zweiten Ableitungen sind jedoch nicht mehr stetig. Bei Verwendung von Verfahren, die eine Stetigkeit der zweiten Ableitungen voraussetzen, hat dies eine verminderte Konvergenzgeschwindigkeit zur Folge.
- b)  $\text{FQS}(\underline{x}^*, \gamma) = 0$ , wenn für die Differenz zwischen der erreichten Approximation  $t_G(\omega, \underline{x}^*)$  und der Vorschrift  $t_{GS}(\omega)$  gilt:
 
$$|t_G(\omega, \underline{x}^*) - t_{GS}(\omega)| \leq \gamma \cdot d_{TG}(\omega) \quad \forall \omega \in [\omega_1, \omega_2]$$
 Sonst gilt  $\text{FQS}(\underline{x}, \gamma) > 0$ .

Bild II.4 zeigt für eine willkürlich gewählte, toleranz-normierte Fehlerfunktion  $f(\omega, \underline{x})$  die Konstruktion der gewichteten Fehlerfunktion  $g(\omega, \underline{x}, \gamma)$ .

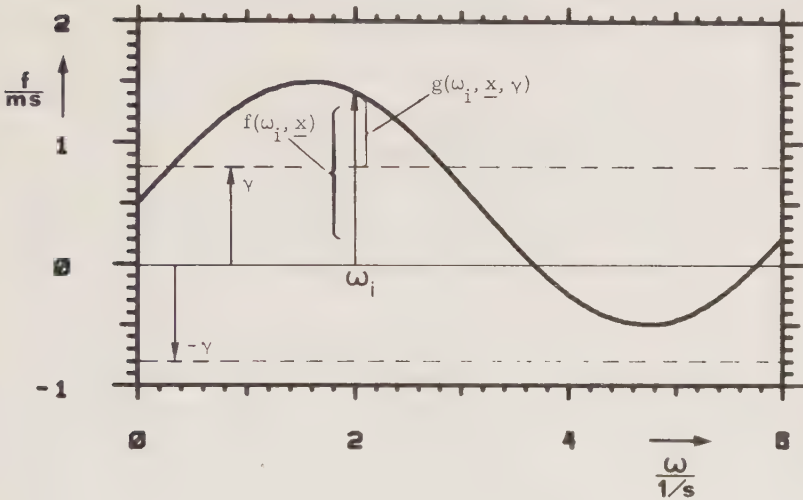


Bild II. 4: Bildung der gewichteten Fehlerfunktion

Zu Beginn des Approximationsprozesses wird eine Gewichtsschranke  $\gamma = \gamma_1$  gewählt, für dieses  $\gamma_1$  die Fehlerquadratsumme  $FQS(\underline{x}, \gamma_1)$  gebildet und diese durch ein Optimierungsverfahren minimiert. Man erhält als neuen Parametervektor  $\underline{x}^*$ . Dann wird eine neue Gewichtsschranke  $\gamma_2$  gewählt, die kleiner ist als der nach der letzten Optimierung verbliebene Maximalfehler  $f_{\max}(\omega, \underline{x}^*)$ . Für dieses  $\gamma_2$  wird  $FQS(\underline{x}^*, \gamma_2)$  gebildet und minimiert.

Die einzelnen Schritte dieses Algorithmus sind im Bild II.5 als Flußdiagramm dargestellt:

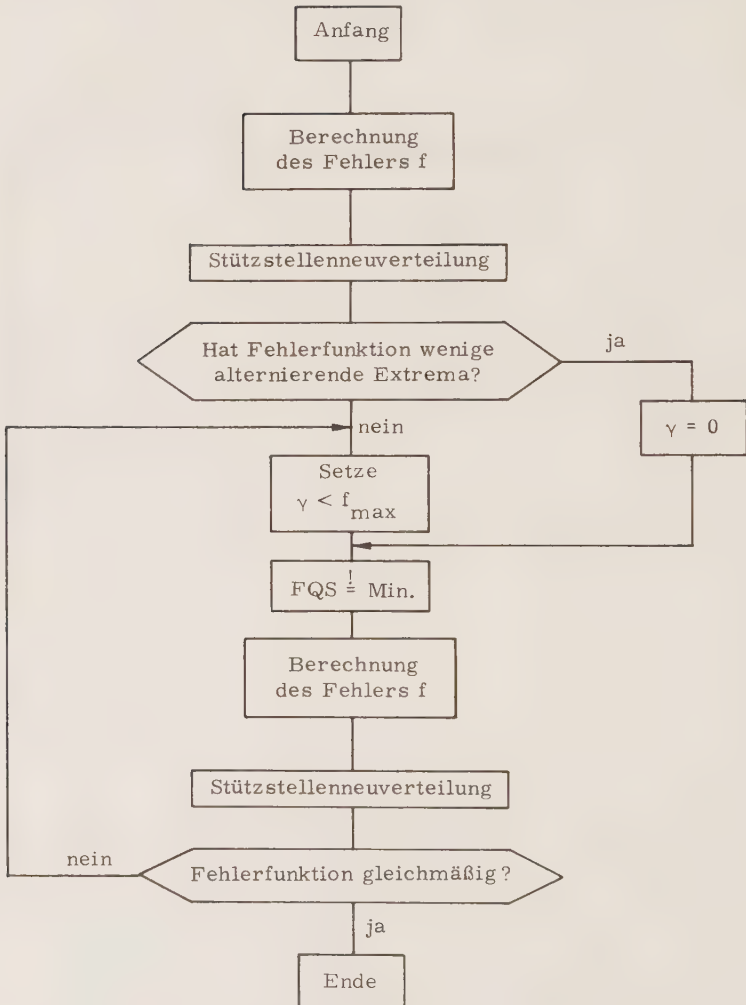


Bild II. 5: Flußdiagramm

Die hier aufgeführte Stützstellen-Neuverteilung ist im Kapitel 7 beschrieben.

Der erste Schritt des Algorithmus, der eine reine Fehlerquadratsummenapproximation darstellt, kann übersprungen werden, wenn die Startlösung schon einigermaßen brauchbar ist, also mehrere alternierende Extrema aufweist.

Die äußere Schleife besteht aus der Eingabe von  $\gamma$ . Diese Eingabe hängt von den zuvor berechneten Extremwerten der Fehlerfunktion, vor allem von  $f_{\max}$ , ab. In der inneren Schleife findet bei der Minimierung von FQS eine Folge von Iterationen statt, bis ein internes Kriterium zum Abbruch der Optimierung führt. Die Abbruchschranke dieses Kriteriums kann zu Beginn der Approximation angegeben werden.

Die Gewichtsschranke  $\gamma$  wird im Dialogbetrieb mit einem Rechner jeweils vom Anwender eingegeben. Die Entscheidung, welches  $\gamma$  im Einzelfall gewählt wird, bereitet meist wenig Schwierigkeiten. Es kann jedoch vorkommen, daß man in ein Nebenminimum gerät. Verfahren, welche hier nach einem "starren" Algorithmus arbeiten, finden in der Regel nicht mehr aus diesem Nebenminimum heraus und bleiben hängen. Durch die Eingabe der Gewichtsschranke im Dialogbetrieb ist man jedoch wesentlich flexibler und kann die stetige Verringerung von  $\gamma$  dem jeweiligen Problem anpassen. Wie aus der Methode der Intervallschachtelung bekannt ist, kann eine zu radikale Verkleinerung von  $\gamma$  die nachfolgenden Optimierungsschritte so sehr erschweren, daß zwar die Fehlerquadratsumme geringfügig kleiner, der Maximalfehler  $f_{\max}$  jedoch größer wird. Wie behutsam deshalb die Verringerung von  $\gamma$  vorzunehmen ist, hängt häufig auch vom jeweiligen Beispiel ab.

Es sei hierbei noch angemerkt, daß für eine erfolgreiche Verwendung auch etwas Erfahrung im Umgang mit dieser Methode notwendig ist. Denn durch das Eingeben von  $\gamma$  gestaltet der Anwender die Funktion FQS jedes Mal neu, so daß die darauf folgenden Optimierungsschritte bei ungünstig gewähltem  $\gamma$  auch erheblich erschwert werden können.

Wenn man bei einem vorliegenden Problem der Approximation des Gruppenlaufzeitverlaufs im einen Fall die Gewichtsschranke  $\gamma$  vorsichtig, im anderen Fall rascher herabsetzt, dann kann man auf diese Weise unter Umständen zu mehreren gleichmäßigen Lösungen gelangen. Diese Lösungen unterscheiden sich in ihrer Güte, also in dem erreichten Maximalfehler  $f_{\max}$ . Sie können sogar die gleiche Alternantenlänge besitzen. Kapitel 9 bringt hierfür ein Beispiel.

Der Abbruch des Verfahrens durch den Anwender erfolgt im allgemeinen dann, wenn — vielleicht mit Ausnahme der Fehlerwerte an den Intervallgrenzen — sämtliche Fehlerextrema von  $f(\omega, \underline{x})$  genügend gleichmäßig sind, die Fehlerfunktion also als Alternante bezeichnet werden darf.

## 7. Fehlerextremwertbestimmung und Stützstellenneuverteilung

Das in diesem Teil II beschriebene Verfahren erfordert die Diskretisierung des Approximationsintervalls. Die Frequenzpunkte, an denen der vorgeschriebene Gruppenlaufzeitwert  $t_{GS}(\omega)$  gegeben ist, heißen Stützstellen.

Eine Anwendung des im Kapitel 6 dargestellten Algorithmus erfordert es, daß sämtliche Extrema von  $f(\omega, \underline{x})$  genau bestimmt werden. Zunächst muß natürlich vorausgesetzt werden, daß genügend Stützstellen angegeben worden sind. Dann kann zwischen zwei Stützstellen höchstens ein Extremum von  $f(\omega, \underline{x})$  liegen. Die Entscheidung, ob zwischen zwei Stützstellen ein Extremum liegt, liefert die für alle  $v$  zu prüfende nachfolgende Ungleichung:

$$[f(\omega_v, \underline{x}) - f(\omega_{v-1}, \underline{x})] \cdot [f(\omega_{v+1}, \underline{x}) - f(\omega_v, \underline{x})] \leq 0. \quad (\text{II. 7. 1})$$

Wenn sie erfüllt ist, dann muß im Bereich  $\omega_{v-1} < \omega < \omega_{v+1}$  die Fehlerfunktion  $f(\omega, \underline{x})$  ein lokales Extremum  $f(\omega_m, \underline{x})$  haben.

Nun gibt es verschiedene Möglichkeiten, um  $\omega_m$  zu bestimmen.

Die naheliegende Möglichkeit, die beiden Bereiche  $\omega_{v-1} < \omega < \omega_v$  und  $\omega_v < \omega < \omega_{v+1}$  mittels jeweiliger Intervallhalbierung nach dem Extremum  $\omega_m$  abzutasten, erweist sich wegen zu hoher Rechenzeit als unzweckmäßig.

Als zuverlässig und einigermaßen schnell zeigte sich die Methode der "Parabelinterpolation mit Vorversetzung". Im Gegensatz zur einfachen Parabelinterpolation — Parabel durch  $f(\omega_{v-1}, \underline{x})$ ,  $f(\omega_v, \underline{x})$  und  $f(\omega_{v+1}, \underline{x})$  — wird hierbei nach Abtastung der Intervalle  $[\omega_{v-1}, \omega_v]$  bzw.  $[\omega_v, \omega_{v+1}]$  ein neuer Extremwert durch drei benachbarte Punkte eingeschachtelt. Dann erfolgt eine Parabelinterpolation. Falls notwendig, wird der Vorgang mehrere Male wiederholt, Intervallvorversetzung sowie Parabelinterpolation. In [31] und [34] ist das verwendete Verfahren ausführlich dargestellt.

Neben der genauen Fehlerextremwertbestimmung und dem Berechnen der zugehörigen Frequenzpunkte ist ferner noch die Anzahl sowie die Anordnung der Stützstellen von großem Interesse. Die Rechenzeit hängt schließlich nicht nur stark von der Anzahl der Parameter, sondern auch von der Anzahl der Stützstellen ab. Deshalb wählt man so wenige Stützstellen wie möglich, muß dabei aber darauf achten, daß die toleranz-normierte Fehlerfunktion  $f(\omega, \underline{x})$  noch genau genug beschreibbar bleibt, was bedeutet, daß eine Lokalisierung sämtlicher Extrema noch möglich sein muß.

Neben der Gewichtsschranke  $\gamma$ , die für die Berechnung der zu minimierenden Fehlerquadratsumme  $FQS(\underline{x}, \gamma)$  eine bedeutende Rolle spielt, hat auch die Anordnung der Stützstellen einen großen Einfluß auf die Optimierung. Denn für die Erfassung und Minimierung der Extrema müssen sich an den entsprechenden Frequenzpunkten auch Stützstellen befinden, da sonst die Extrema in der toleranz-normierten Fehlerfunktion  $f(\omega, \underline{x})$  und somit in der Fehlerquadratsumme  $FQS$  überhaupt nicht vorkommen und deshalb auch nicht berücksichtigt werden können. Daher ist es notwendig, die Abszissenwerte der Extrema mit Stützstellen zu versehen.

Eine weitere Gewichtung der Fehlerfunktion  $f(\omega, \underline{x})$  läßt sich dadurch erreichen, daß die Stützstellen entsprechend dem Verlauf von  $f(\omega, \underline{x})$  neu verteilt werden. Je steiler die Fehlerkurve verläuft, desto dichter werden die Stützstellen in dem entsprechenden Bereich gelegt [15]. Dadurch gehen "Ausreißer" in Form von Fehlerspitzen stärker ein als flache Verläufe, denn die Stützstellenneuverteilung hat direkten Einfluß auf die Fehlerquadratsumme FQS.

Nach jeder Fehlerextremwertbestimmung erfolgt eine entsprechende Stützstellenneuverteilung.

Diese einer Fehlergewichtung entsprechende neue Verteilung hat den gleichen Zweck wie die Gewichtsschranke  $\gamma$ : Es soll ein gleichmäßiger Verlauf der Fehlerfunktion mit einer möglichst langen Alternante erreicht werden.

## 8. Berücksichtigung von Nebenbedingungen

Bei der Approximation lassen sich auch Nebenbedingungen berücksichtigen, welche eine nachfolgende Realisierung erleichtern oder gar erst ermöglichen.

### a) Mindestabstand der Pole von der imaginären Achse der p-Ebene

Ein Mindestabstand  $\epsilon > 0$  kann aus Stabilitätsgründen bei aktiven Realisierungen von Interesse sein. Denn es können durch Alterung von Bauelementen Pole von der linken p-Halbebene in die rechte wandern, wodurch das Netzwerk instabil wird. Auch die Bauelementetoleranzen können bewirken, daß ein in der linken p-Halbebene in der Nähe der imaginären Achse berechneter Pol sich nach erfolgter Realisierung in der rechten p-Halbebene befindet.

Das Einhalten des eben geschilderten Mindestabstands läßt sich durch eine Parametertransformation erzwingen. Ein reeller Pol  $p_{\infty} = -a^2$  wird durch  $p_{\infty} = -a^2 - \epsilon$  ersetzt, wobei  $\epsilon > 0$  gilt. Die Konstante  $\epsilon$

stellt den vorgeschriebenen Mindestabstand aller Pole dar. Da Pole und Nullstellen aber nur spiegelbildlich zur imaginären Achse auftreten, werden auch die reellen Nullstellen von  $p_o = a^2$  in  $p_o = a^2 + \epsilon$  transformiert. Die Transformation konjugiert komplexer Pole und Nullstellen erfolgt entsprechend.

#### b) Einschränkung des Variationsbereichs einzelner Parameter

Eine weitere, manchmal gewünschte Einschränkung besteht darin, einen Parameter, beispielsweise die Gruppenlaufzeitkonstante  $t_0$ , nicht beliebig variieren zu lassen, sondern nur innerhalb einer Schranke. Auch hier führt eine Parametertransformation zum Ziel.

$$t_{0g} = k \cdot \frac{2t_0}{1+t_0^2} \quad (\text{II. 8. 1})$$

Für den Wertebereich von  $t_{0g}$  erhält man daraus

$$|t_{0g}| \leq |k|.$$

$k$  gibt also die Schranke an.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Einhaltung der beschriebenen Nebenbedingungen den Parametervektor  $\underline{x}$  nicht in seinem Variationsbereich beschränkt. Allerdings kann durch Nebenbedingungen die Güte der Lösung stark beeinflusst werden. Meist nimmt die Länge der Alternante ab, falls sich überhaupt noch eine erzwingen läßt, und der maximale toleranz-normierte Fehler  $f_{\max}(\omega, \underline{x})$  wird größer als bei einer Vorschrift ohne Nebenbedingung.

## 9. Beispiele

Aus den gerechneten Beispielen seien drei herausgegriffen. Es wurden die normierte Frequenz  $\Omega$  sowie die normierte Gruppenlaufzeit  $T_G(\Omega)$  verwendet. Aus der zulässigen Toleranzfunktion  $d_{TG}(\omega)$  wird auf Grund der Normierung die Toleranzfunktion  $d_{TG}(\Omega)$ . Die Umrechnung der unnormierten Gruppenlaufzeit  $t_G(\omega)$  in die (frequenz-) normierte  $T_G(\Omega)$  geschieht durch folgende Beziehung:

$$T_G(\Omega) = \omega_B \cdot t_G(\omega) = 2\pi \cdot f_B \cdot t_G(\omega) \quad (\text{II. 9. 1})$$

Daß bei allen drei Beispielen die Sollkurve formelmäßig vorliegt, ist Zufall und natürlich für die Anwendung des Verfahrens nicht notwendig. Ebenso wenig wird verlangt, daß die Toleranzfunktion  $d_{TG}(\Omega)$  keine Sprungstellen aufweist. Die genannten Fehler sind nicht auf die zulässige Toleranz bezogen.

### Beispiel 1

Vorschrift:  $0,857143 \leq \Omega \leq 1,142857$  :

$$T_G(\Omega) = [153,9382354 \cdot \Omega - 105,5576999] \pm 0,405$$

Die Approximation wurde mit drei Allpässen 2. Grades durchgeführt; als Bezugsfrequenz wurde  $f_B = 70$  MHz gewählt.

Start- und Lösungswerte können den folgenden Tabellen entnommen werden:

#### Parameterwerte der Startlösung (1S)

$$p_0 = 0,15 \pm 0,95 \text{ j}$$

$$p_0 = 0,05 \pm 1,00 \text{ j}$$

$$p_0 = 0,08 \pm 1,10 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,15 \pm 0,95 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,05 \pm 1,00 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,08 \pm 1,10 \text{ j}$$

$$t_0 = 0,0$$

Parameterwerte der Lösung (1)

$$p_o = 0,1104464997 \pm 0,9713872497 \text{ j}$$

$$p_o = 0,08182669434 \pm 1,075527172 \text{ j}$$

$$p_o = 0,05379439220 \pm 1,151314255 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,1104464997 \pm 0,9713872497 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,08182669434 \pm 1,075527172 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,05379439220 \pm 1,151314255 \text{ j}$$

$$t_0 = -13,69783391$$

Der in der Startlösung auftretende Maximalfehler war

$e_{\max}(\Omega, \underline{x}_{-1S}) = 41,43$ , der Fehler der Lösung  $e_{\max}(\Omega, \underline{x}_1) = 0,4049$ ,  
so daß die Vorschrift gerade erfüllt war.

Bild II. 6 zeigt die Vorschrift, Bild II. 7 den Fehlerverlauf der

Lösung. Da die Übereinstimmung von Vorschrift und Approxi-

mationsergebnis sehr gut war, wurde darauf verzichtet, Vorschrift  
und Ergebnis im gleichen Bild darzustellen.

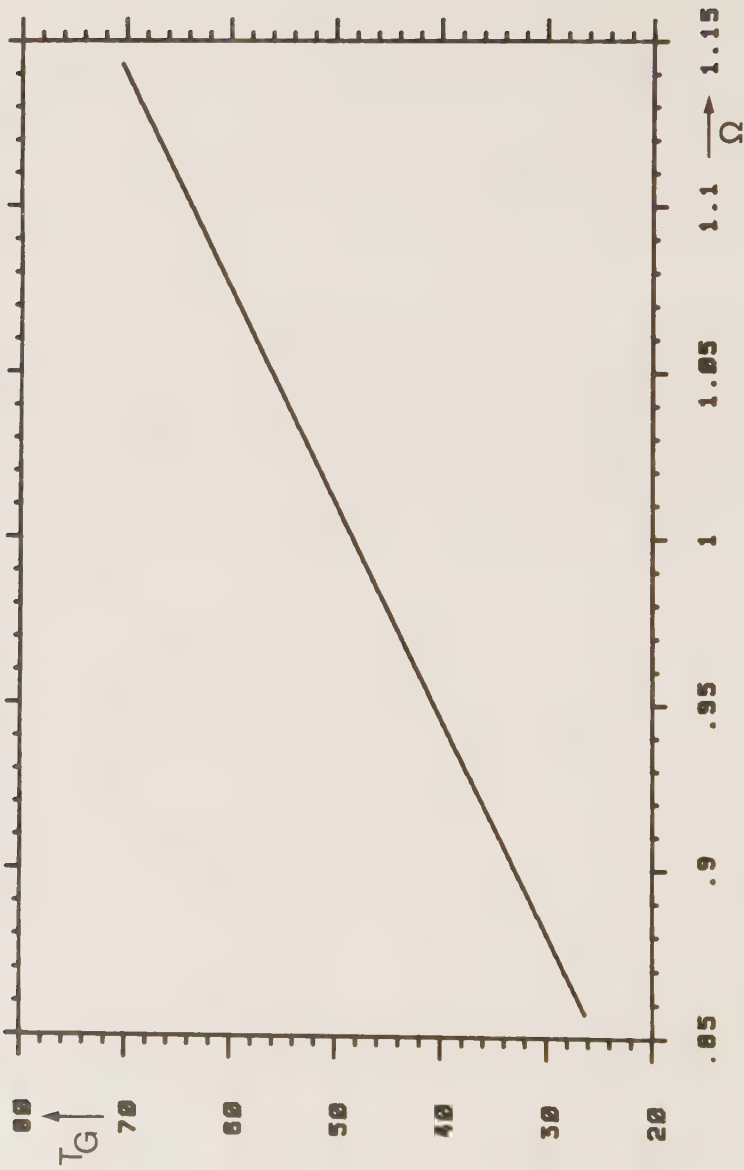


Bild II. 6: Vorschrift für Beispiel 1

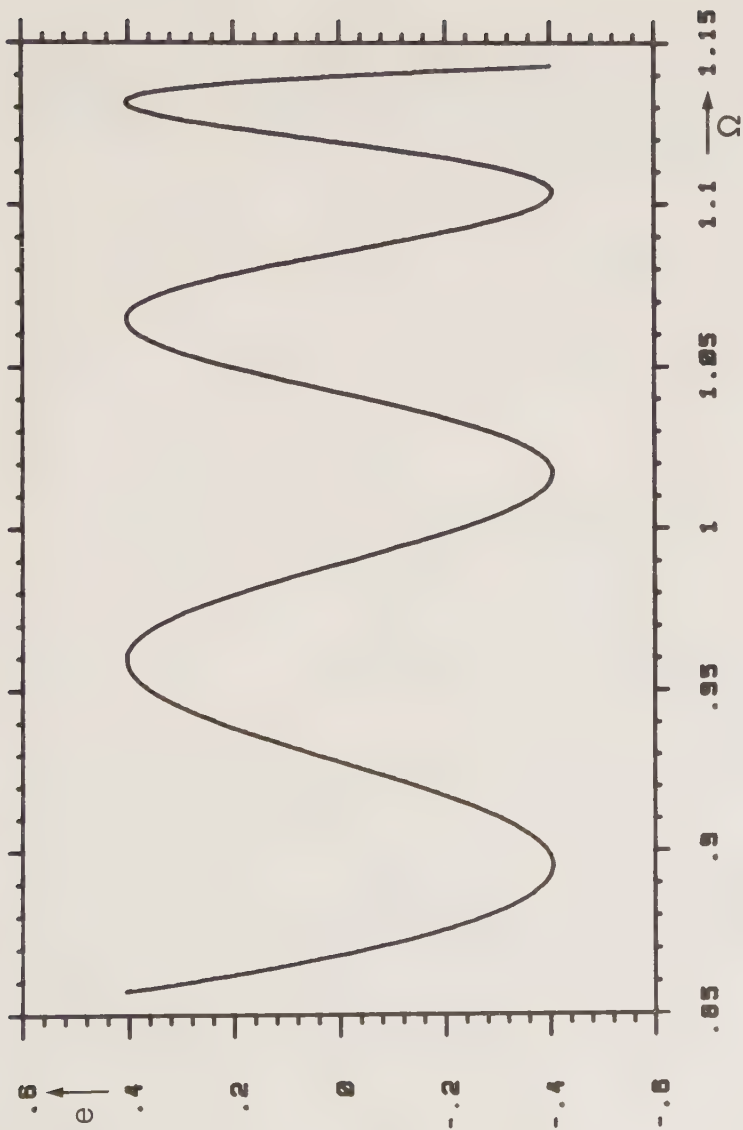


Bild II. 7: Fehlervverlauf der Lösung (1)

## Beispiel 2

Vorschrift:  $0,82857 \leq \Omega \leq 1,171428$  :

$$T_G(\Omega) = [11,1807 - 48,041 \cdot (\Omega - 1)^2] \pm 0,00439$$

Die Approximation erfolgte mit zwei Allpässen 2. Grades, die Bezugsfrequenz war  $f_B = 70$  MHz. Die nächsten Tabellen geben Start- und Lösungswerte an:

### Parameterwerte der Startlösung (2S)

$$p_0 = 0,5 \pm 0,9 \text{ j}$$

$$p_0 = 0,5 \pm 1,0 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,5 \pm 0,9 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,5 \pm 1,0 \text{ j}$$

$$t_0 = 0,0$$

### Parameterwerte der Lösung (2)

$$p_0 = 0,3235861896 \pm 0,8827241958 \text{ j}$$

$$p_0 = 0,3237056196 \pm 1,123946707 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,3235861896 \pm 0,8827241958 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,3237056196 \pm 1,123946707 \text{ j}$$

$$t_0 = -0,00903316$$

Der maximale Fehler der Startlösung betrug  $e_{\max}(\Omega, \underline{x}_{2S}) = 2,98$  , als maximaler Fehler der Lösung ergab sich  $e_{\max}(\Omega, \underline{x}_2) = 0,0025$  , so daß die Vorschrift sicher erfüllt war.

Bild II.8 zeigt die Vorschrift, Bild II.9 den Fehlerverlauf der Lösung. Auf eine gemeinsame Darstellung von Vorschrift und Lösung wurde auch hier verzichtet, da auf Grund der guten Übereinstimmung eine Unterscheidung beider Kurven rein optisch kaum möglich ist.

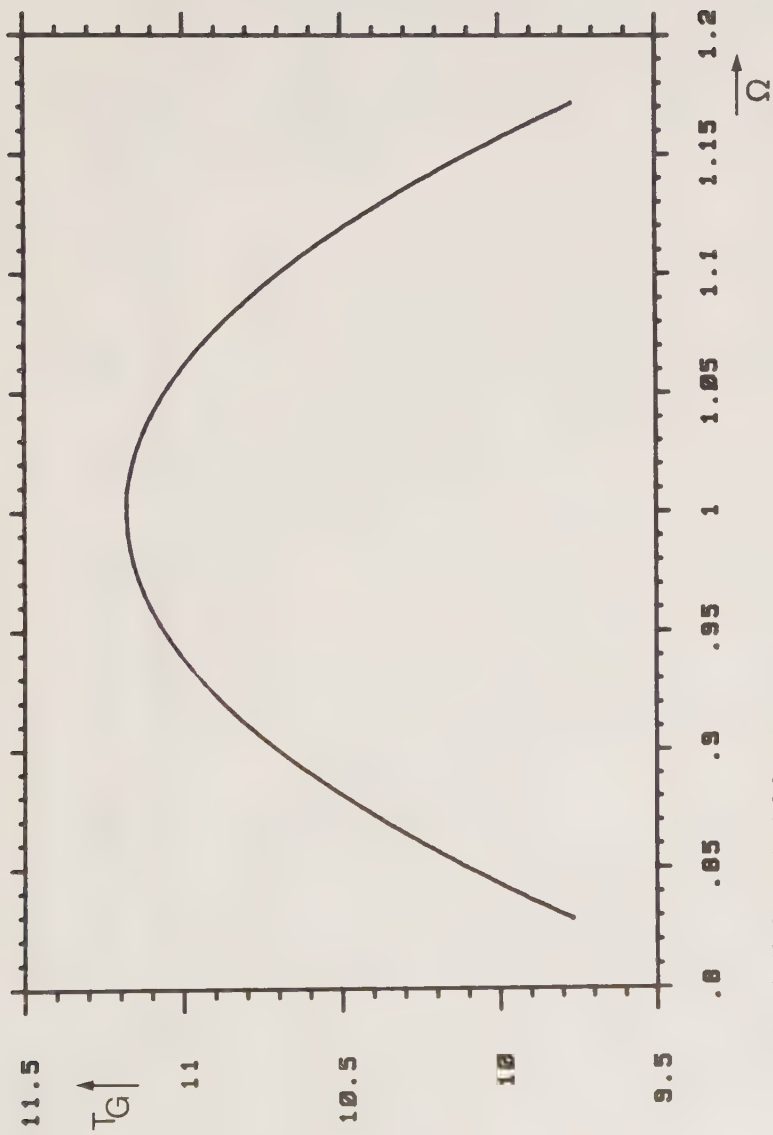


Bild II. 8: Vorschrift für Beispiel 2

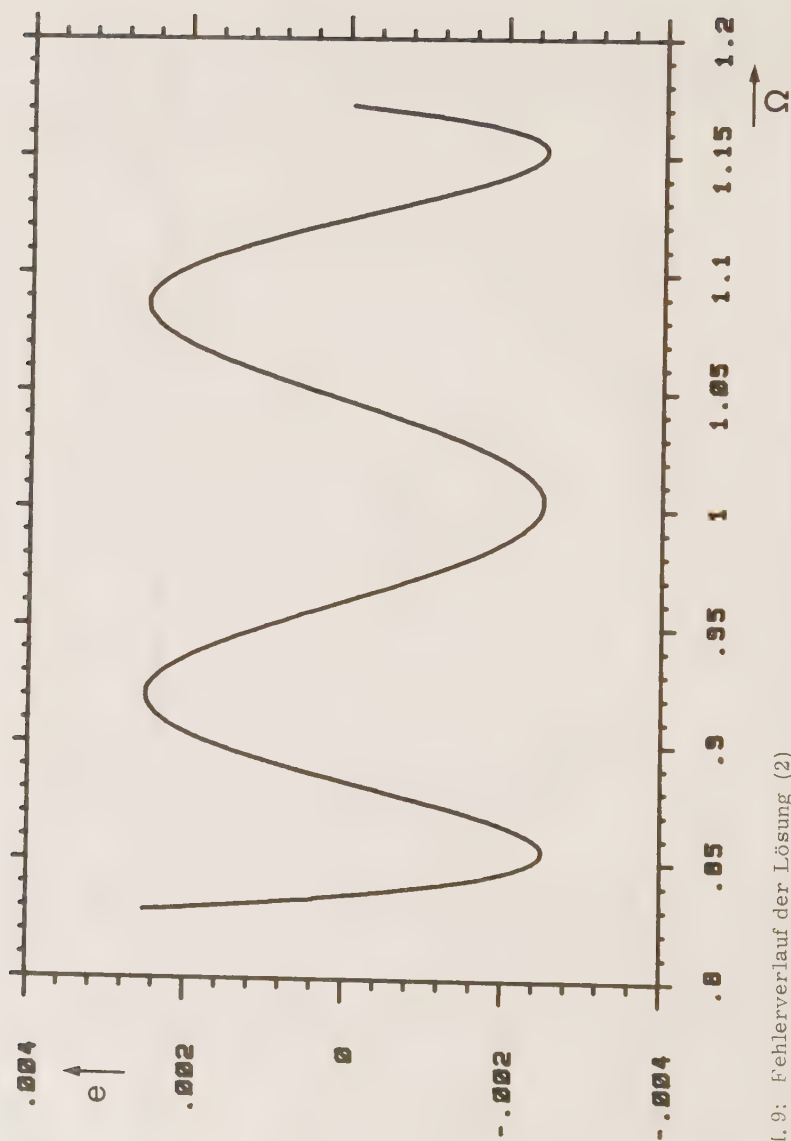


Bild 11.9: Fehlervverlauf der Lösung (2)

Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß es nicht möglich war, den am Ende des Approximationsbereichs liegenden Fehler auf den Betrag des Maximalfehlers anzuheben. Auch daraus ist ersichtlich, daß die vorliegende Lösung nichts mit einer Tschebyscheff-Lösung zu tun hat, was mit dem Inhalt von Teil I, Kapitel 2, übereinstimmt.

### Beispiel 3

Vorschrift:  $0,828571 \leq \Omega \leq 1,17143$  :

$$T_G(\Omega) = [25,05782839 - 224,493(\Omega - 1)^2] \pm 0,044$$

Als Bezugsfrequenz wurde wieder  $f_B = 70$  MHz gewählt. Start- und Lösungswerte der mit drei Allpässen 2. Grades erfolgten Approximation enthalten die folgenden Tabellen:

#### Parameterwerte der Startlösung (3S1)

$$p_0 = 0,18 \pm 0,88 \text{ j}$$

$$p_0 = 0,25 \pm 1,00 \text{ j}$$

$$p_0 = 0,15 \pm 1,05 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,18 \pm 0,88 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,25 \pm 1,00 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,15 \pm 1,05 \text{ j}$$

$$t_0 = 0,0$$

#### Parameterwerte der Startlösung (3S2)

$$p_0 = 0,15 \pm 0,85 \text{ j}$$

$$p_0 = 0,15 \pm 1,00 \text{ j}$$

$$p_0 = 0,15 \pm 1,05 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,15 \pm 0,85 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,15 \pm 1,00 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,15 \pm 1,05 \text{ j}$$

$$t_0 = 0,0$$

Parameterwerte der Startlösung (3S3)

$$p_o = 0,05 \pm 0,85 \text{ j}$$

$$p_o = 0,07 \pm 0,95 \text{ j}$$

$$p_o = 0,09 \pm 1,05 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,05 \pm 0,85 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,07 \pm 0,95 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,09 \pm 1,05 \text{ j}$$

$$t_0 = 0,0$$

Parameterwerte der Lösung (3A)

$$p_o = 0,1906996138 \pm 0,8942971481 \text{ j}$$

$$p_o = 0,2245671825 \pm 1,003387817 \text{ j}$$

$$p_o = 0,1929771789 \pm 1,106628487 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,1906996138 \pm 0,8942971481 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,2245671825 \pm 1,003387817 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,1929771789 \pm 1,106628487 \text{ j}$$

$$t_0 = 0,14993979$$

Parameterwerte der Lösung (3B)

$$p_o = 0,1908879540 \pm 0,8961795214 \text{ j}$$

$$p_o = 0,2297474400 \pm 1,003752665 \text{ j}$$

$$p_o = 0,1932613850 \pm 1,104554372 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,1908879540 \pm 0,8961795214 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,2297474400 \pm 1,003752665 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,1932613850 \pm 1,104554372 \text{ j}$$

$$t_0 = 0,08178775$$

### Parameterwerte der Lösung (3C)

$$p_0 = 0,1772290155 \pm 0,8716544761 \text{ j}$$

$$p_0 = 0,1775698853 \pm 1,000604412 \text{ j}$$

$$p_0 = 0,1772427664 \pm 1,129559254 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,1772290155 \pm 0,8716544761 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,1775698853 \pm 1,000604412 \text{ j}$$

$$p_\infty = -0,1772427664 \pm 1,129559254 \text{ j}$$

$$t_0 = 1,21826608$$

Der maximale Fehler der Startlösung (3S1) war  $e_{\max}(\Omega, \underline{x}_{3S1}) = 3,0$ , die maximalen Fehler der Lösungen (3A) bzw. (3B) betrugen  $e_{\max}(\Omega, \underline{x}_{3A}) = 0,039$  bzw.  $e_{\max}(\Omega, \underline{x}_{3B}) = 0,041$ . Die Lösungen (3A) und (3B) wurden von der Startlösung (3S1) aus erreicht. Die Maximalfehler der Startlösungen (3S2) bzw. (3S3) ergaben sich zu  $e_{\max}(\Omega, \underline{x}_{3S2}) = 7,2$  bzw.  $e_{\max}(\Omega, \underline{x}_{3S3}) = 33,4$ . Die von diesen beiden Startlösungen aus erzielte Lösung (3C) hatte einen Maximalfehler von  $e_{\max}(\Omega, \underline{x}_{3C}) = 0,0099$ , die Vorschrift wird hier am deutlichsten übertroffen.

Bild II. 10 zeigt die Vorschrift, Bild II. 11 den Fehlerverlauf der drei Lösungen, die sich durch ihre Güte, teilweise auch durch die Alternantenlänge unterscheiden.

Von der Lösungsmenge der erreichten gleichmäßigen Approximationen wurden hier drei Lösungen angegeben; es wurden noch weitere gefunden.

Gerade bei diesem Beispiel gibt es offensichtlich eine viel größere Lösungsmannigfaltigkeit als bei den vorangegangenen. Ein Verfahren, das ohne Dialogbetrieb arbeitet, also vergleichsweise unflexibel, kann hier sehr leicht zu einer ungünstigen Lösung kommen, in ein "Nebenminimum", aus dem es dann nicht mehr herausfindet.

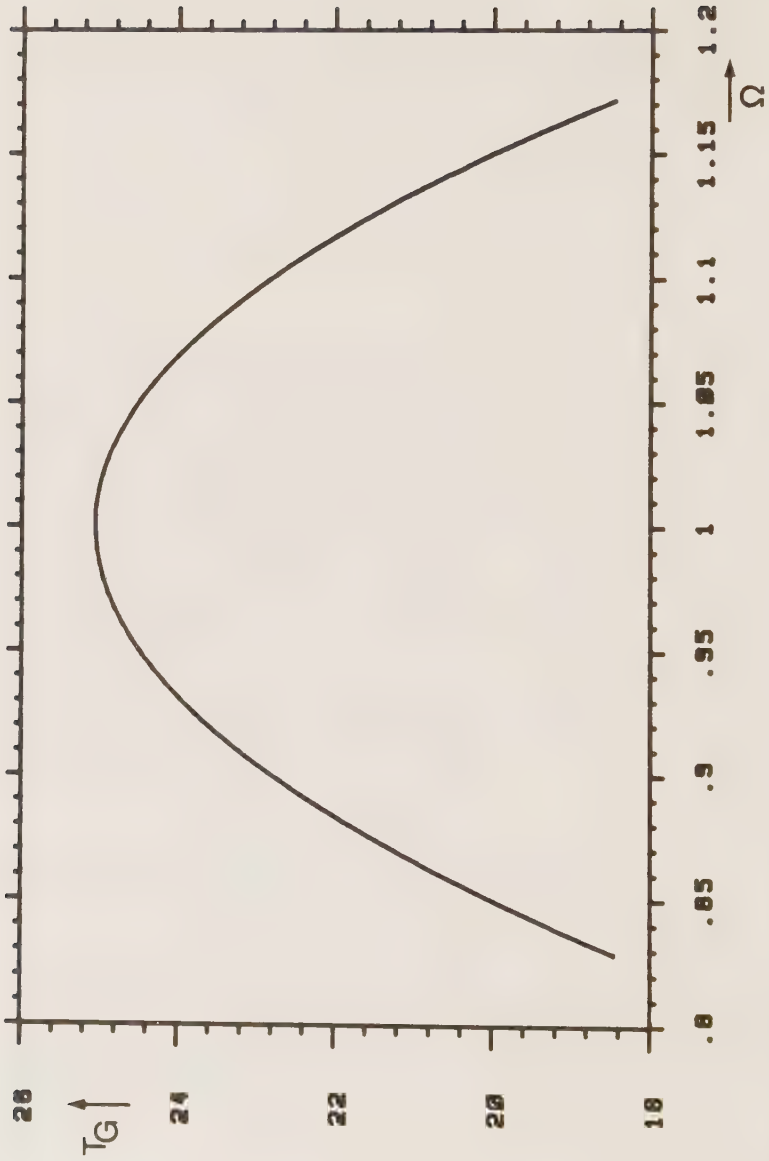


Bild II. 10: Vorschrift für Beispiel 3

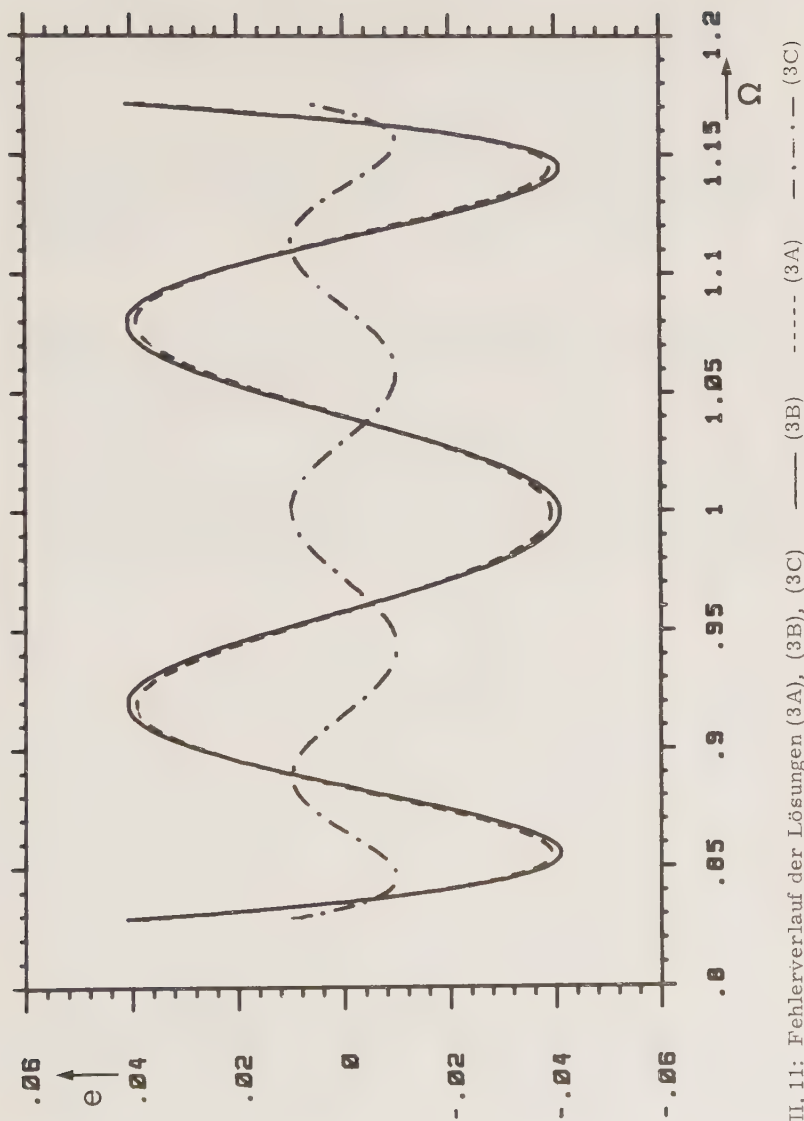


Bild II. 11: Fehlerverlauf der Lösungen (3A), (3B), (3C)

Durch das hier angewandte Verfahren gelang es, aus einer solchen, ungünstigeren Lösung herauszukommen. Durch geschickte Wahl der Gewichtsschranke  $\gamma$  kann man also teilweise auch bei äußerst ungünstig gewählten Startwerten noch zu einer gleichmäßigen Fehlerkurve gelangen, deren Extrema noch weit unter der zulässigen Toleranz liegen. Allgemeinere Aussagen über die Startwerte, die zu einem gleichmäßigen Fehlerverlauf führen, sind augenscheinlich unmöglich.

Wie aus diesen Beispielen ersichtlich ist, arbeitet das hier in Teil II vorgestellte Verfahren zur Approximation von Gruppenlaufzeitvorschriften recht effektiv, wenn es auch zum Teil mehr Rechenzeit beansprucht als andere Verfahren, die keine Optimierung zu Hilfe nehmen. Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß nicht in jedem Fall eine gleichmäßige Lösung erreicht werden kann, was vor allem dann der Fall ist, wenn die Approximation mit zu niedrigem Grad durchgeführt wurde oder durch Nebenbedingungen erschwert wurde.

### III. GLEICHZEITIGE APPROXIMATION VON DÄMPFUNGS- UND GRUPPENLAUFZEITVORSCHRIFTEN

#### 1. Zusammenhang zwischen Übertragungsfunktion, Dämpfung und Gruppenlaufzeit; Parametertransformation zur Stabilitätssicherung; Freiheitsgrade für die Optimierung

Der Zusammenhang zwischen der Übertragungsfunktion  $H(p)$  eines Zweitors, seiner Dämpfung  $a(\omega)$  und seiner Gruppenlaufzeit  $t_G(\omega)$  ist durch folgende Gleichungen gegeben:

$$a(\omega) = -20 \cdot \lg |H(j\omega)| \quad \text{dB} \quad (\text{III. 1. 1})$$

$$t_G(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \{ \arg H(j\omega) \} \quad (\text{III. 1. 2})$$

Die Übertragungsfunktion sei in Produktdarstellung gegeben:

$$H(p) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{\lambda} (p - a_i) \cdot \prod_{i=1}^1 [(p - b_i)^2 + c_i^2]}{\prod_{i=1}^n (p + d_i^2) \cdot \prod_{i=1}^k [(p + e_i^2)^2 + f_i^2]} \quad (\text{III. 1. 3})$$

Die Bedeutung der einzelnen Parameter sowie der anderen, vorkommenden Größen ist:

$K$  beliebige reelle Konstante, die häufig durch die Vorschrift bestimmt ist

$a_i$  Realteil einer reellen Nullstelle

$b_i$  Realteil einer konjugiert komplexen Nullstelle

$c_i$  Imaginärteil einer konjugiert komplexen Nullstelle

|           |                                               |
|-----------|-----------------------------------------------|
| $-d_i^2$  | Realteil eines reellen Poles                  |
| $-e_i^2$  | Realteil eines konjugiert komplexen Poles     |
| $f_i$     | Imaginärteil eines konjugiert komplexen Poles |
| $\lambda$ | Anzahl der reellen Nullstellen                |
| $l$       | Anzahl der konjugiert komplexen Nullstellen   |
| $\kappa$  | Anzahl der reellen Pole                       |
| $k$       | Anzahl der konjugiert komplexen Pole          |

Aus Stabilitätsgründen muß zwischen  $\lambda$ ,  $l$ ,  $\kappa$  und  $k$  der Zusammenhang bestehen:

$$2l + \lambda \leq 2k + \kappa \quad (\text{III. 1. 4})$$

Wie man aus (III. 1. 3) erkennen kann, wurde auch hier die im Teil II, Kapitel 2, eingeführte Parametertransformation zur Stabilitätssicherung verwendet. Durch diese Transformation können Pole der Übertragungsfunktion nur in der offenen linken p-Halbebene auftreten.

Aus (III. 1. 3) erhält man gemäß (III. 1. 1) und (III. 1. 2) die interessierenden Größen  $a(\omega, \underline{x})$  und  $t_G(\omega, \underline{x})$ , wobei  $t_G(\omega, \underline{x})$  noch um die frei wählbare Gruppenlaufzeitkonstante  $t_0$  erweitert ist.

$$a(\omega, \underline{x}) = -20 \cdot \lg \left| K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{\lambda} (j\omega - a_i) \cdot \prod_{i=1}^l (-\omega^2 + b_i^2 - 2j\omega b_i^2 + c_i^2)}{\prod_{i=1}^{\kappa} (j\omega + d_i^2) \cdot \prod_{i=1}^k (-\omega^2 + e_i^4 + 2j\omega e_i^2 + f_i^2)} \right| \quad \text{dB}$$

(III. 1. 5)

$$\begin{aligned}
 t_G(\omega, \underline{x}) = & \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{a_i}{\omega^2 + a_i^2} + \sum_{i=1}^1 \frac{2b_i \cdot (\omega^2 + b_i^2 + c_i^2)}{(\omega^2 - b_i^2 - c_i^2)^2 + 4b_i^2 \omega^2} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{\omega^2 + d_i^4} + \\
 & + \sum_{i=1}^k \frac{2e_i^2(\omega^2 + e_i^4 + f_i^2)}{4\omega^2 e_i^4 + (-\omega^2 + e_i^4 + f_i^2)^2} - t_0 \quad (\text{III. 1. 6})
 \end{aligned}$$

Mit  $\underline{x}$  ist der Parametervektor bezeichnet, der in (III. 1. 7) noch beschrieben wird. Wie man aus (III. 1. 6) erkennen kann, stellt der erste Ausdruck den Gruppenlaufzeitbeitrag der reellen Nullstellen, der zweite den Beitrag der konjugiert komplexen Nullstellen dar. In der offenen rechten p-Halbebene liegende Nullstellen haben für jeden Frequenzpunkt  $p = j\omega$  eine positive Gruppenlaufzeit, liegen sie in der offenen linken p-Halbebene, dann ist ihre Gruppenlaufzeit negativ. Demgegenüber können der dritte und vierte Term in (III. 1. 6) nur einen positiven Beitrag zur gesamten Gruppenlaufzeit liefern, da durch die Parametertransformation die Pole nicht in der abgeschlossenen rechten p-Halbebene liegen können.

Wie aus (III. 1. 5) und (III. 1. 6) ersichtlich ist, spielt die Konstante K nur für die Dämpfung eine Rolle, die Konstante  $t_0$  nur für die Gruppenlaufzeit. Da K häufig vorgeschrieben ist, wurde es bei den im Kapitel 9 vorgelegten Beispielen nicht zur Optimierung verwendet. Es ist jedoch grundsätzlich möglich, bei nicht-vorgeschriebener Konstante K diese als zusätzlichen Parameter zu verwenden.

Für die Optimierung stehen als Parameter zur Verfügung  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$  sowie  $t_0$ . Durch die vorher erwähnte Parametertransformation zur Stabilitätsicherung werden die Parameter keinerlei Einschränkungen unterworfen. Der Parametervektor  $\underline{x}$  hat folgendes Aussehen:

$$\underline{x} = [a_1, \dots, a_\lambda, b_{\lambda+1}, c_{\lambda+1}, \dots, b_{\lambda+1}, c_{\lambda+1}, d_{\lambda+1+1}, \dots, d_{\lambda+1+\kappa}, \\ e_{\lambda+1+\kappa+1}, f_{\lambda+1+\kappa+1}, \dots, e_{\lambda+1+\kappa+k}, f_{\lambda+1+\kappa+k}, t_0]^T \quad (\text{III. 1. 7})$$

## 2. Sukzessive Approximation

Das meist gebräuchliche Vorgehen bei der Approximation einer Dämpfungs- und einer Gruppenlaufzeitvorschrift besteht darin, zuerst mittels eines Verfahrens zur Approximation des Dämpfungsverlaufs die Dämpfungsforderungen zu erfüllen, um dann mit Hilfe eines Verfahrens zur Approximation des Gruppenlaufzeitverlaufs die vorgeschriebene Gruppenlaufzeit zu erreichen. Da dieses Vorgehen aus zwei aufeinander folgenden Schritten besteht, soll es sukzessive Approximation genannt werden.

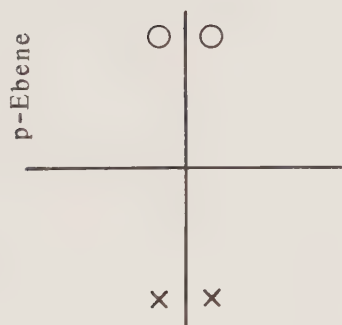
Beim ersten Schritt, der Approximation der Dämpfungsvorschrift, erhält man eine Mindestphasenübertragungsfunktion  $H_M(p)$ , während der zweite Schritt, die Approximation der Gruppenlaufzeitvorschrift, eine Allpaßübertragungsfunktion  $H_A(p)$  liefert. Die Realisierung von  $H_M(p)$  ergibt ein Zweitor  $ZT_M$ , die Realisierung von  $H_A(p)$  ein Zweitor  $ZT_A$ . Die rückwirkungsfreie Kettenschaltung beider Zweitore liefert ein Netzwerk, das die Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitforderungen erfüllt. Der Kettenschaltung der Zweitore entspricht die Multiplikation der Übertragungsfunktionen  $H_M(p)$  und  $H_A(p)$ :

$$H(p) = H_M(p) \cdot H_A(p) \quad (\text{III. 2. 1})$$

Im Bild III. 1 sind für ein Beispiel die Pol-Nullstellen-Diagramme der Übertragungsfunktionen  $H_M(p)$ ,  $H_A(p)$  sowie  $H(p)$  gegeben.



$H(p)$



$H_A(p)$



$H_M(p)$

Bild III. 1: Pol-Nullstellen-Diagramme von  $H_M(p)$ ,  $H_A(p)$  und  $H(p)$

### 3. Zweck der gleichzeitigen Approximation, Vergleich mit der sukzessiven Approximation

Das Vorgehen bei der sukzessiven Approximation berücksichtigt zunächst nur die Dämpfungsforderung, dann wiederum nur die Gruppenlaufzeitforderung. Dadurch werden Freiheitsgrade verschenkt.

So entstand die Idee, beide Forderungen gleichzeitig zu approximieren. Das bedeutet, daß bei Variation des Parametervektors  $\underline{x}$  entstehende Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitfehler gleichzeitig berücksichtigt werden, daß also der Fehlervektor  $\underline{z}(\underline{x})$  den Dämpfungs- und den Gruppenlaufzeitfehler beinhaltet. Als Ergebnis einer solchen gleichzeitigen Approximation erhält man eine Übertragungsfunktion  $H(p)$ , die Nullstellen gewöhnlich auch in der rechten  $p$ -Halbebene hat, die aber im allgemeinen keine reinen Allpaßstrukturen enthält. Letztere sind charakteristisch für die sukzessive Approximation. Es tritt also bei der gleichzeitigen Approximation keine Kopplung von Polen und Nullstellen mehr auf, wie sie von den Pol-Nullstellen-Quadrupeln bzw. Pol-Nullstellen-Paaren von Allpässen bekannt ist.

Verglichen mit der sukzessiven Approximation stehen bei der gleichzeitigen Approximation zwar nicht mehr Pole und Nullstellen zur Verfügung – bei gleichem Grad  $n$  der Übertragungsfunktion –, wohl aber mehr Freiheitsgrade durch die nicht bestehende Kopplung zwischen Polen und Nullstellen. Man kann deshalb erwarten, daß die Abweichungen von der Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitvorschrift bei der gleichzeitigen Approximation geringer sind als bei der sukzessiven. Äquivalent damit ist die Aussicht, bei der gleichzeitigen Approximation mit einem kleineren Grad der Übertragungsfunktion beide Forderungen erfüllen zu können.

Für die Realisierung bedeutet dies eine Einsparung von Bauelementen.

Daß die vorstehend genannten Erwartungen sich in vollem Umfang erfüllt haben, wird aus einigen Beispielen im Kapitel 9 ersichtlich. Dabei kommt die Überlegenheit der gleichzeitigen Approximation gegenüber der sukzessiven Approximation deutlich zum Ausdruck.

In den in der Literatur aufgeführten Verfahren zur gleichzeitigen Approximation einer Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitvorschrift besteht in der Regel eine Kopplung zwischen Zähler- und Nennerpolynom von  $H(p)$  bzw. eine Einschränkung der Art, daß die Realisierung durch ein verlustloses, passives und/oder reziprokes Zweitor erfolgen soll. Derartige Einschränkungen enthält das in diesem Teil III beschriebene Verfahren grundsätzlich nicht.

Bild III. 2 zeigt das Pol-Nullstellen-Diagramm einer Übertragungsfunktion, die das Ergebnis einer gleichzeitigen Approximation darstellt.

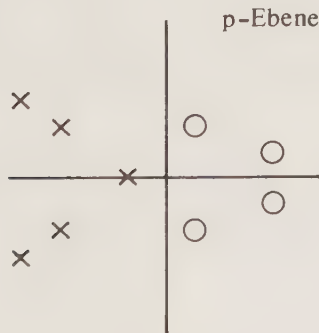


Bild III. 2: Pol-Nullstellen-Diagramm einer durch gleichzeitige Approximation berechneten Übertragungsfunktion  $H(p)$

Schließlich sei noch erwähnt, daß den Vorteilen, welche die gleichzeitige Approximation gegenüber der sukzessiven Approximation bietet, ein Nachteil gegenübersteht, nämlich höhere Rechenzeit auf Grund der größeren Dimension des Fehlervektors  $\underline{z}(\underline{x})$  und der Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}(\underline{x})$ .

#### 4. Startwertproblem

Stellt das Gewinnen brauchbarer Startwerte für die Optimierung schon bei der Approximation einer Gruppenlaufzeitvorschrift den Anwender bisweilen vor Probleme, so ist das Auffinden einigermaßen passabler Startlösungen für die gleichzeitige Approximation häufig noch problematischer. Probiermethoden liefern nur gelegentlich eine brauchbare Ausgangsnäherung. Als sehr zweckmäßig hat es sich in jedem Fall erwiesen, als Startwert für eine gleichzeitige Approximation das Resultat einer sukzessiven Approximation zu nehmen. Dabei kann für die Approximation der Dämpfungsvorschrift z. B. auf ein in [15] beschriebenes Verfahren zurückgegriffen werden, während für die Approximation der Gruppenlaufzeitvorschrift beispielsweise das im Teil II beschriebene Verfahren angewendet werden kann. Obwohl die Parameterwerte der jeweiligen Startlösung der Beispiele vom Kapitel 9 meist weit von der Lösung entfernt waren, erwies sich die Startlösung doch als brauchbar genug, um das Auffinden von Lösungen zu ermöglichen, deren Fehlerextrema bis zum Faktor 70 kleiner waren, als dies bei der sukzessiven Approximation der Fall war. Die gute Konvergenz des für die gleichzeitige Approximation verwendeten Verfahrens kommt darin zum Ausdruck.

Das Ergebnis einer sukzessiven Approximation kann als geeignete Ausgangsnäherung für eine nachfolgende gleichzeitige Approximation bezeichnet werden.

## 5. Wahl geeigneter Fehlerkriterien

Zunächst sei bezüglich der Tschebyscheff-Norm sowie der  $L_2$ -Norm auf die Ausführungen von Teil II, Kapitel 4, hingewiesen. Zwei weitere Fehlerkriterien sollen im folgenden kurz beschrieben werden.

Das Kriterium maximaler Ebnung, das manchmal auch bei der gleichzeitigen Approximation Anwendung findet, z. B. in [24], fordert, daß alle Ableitungen der Fehlerfunktion (inbegriffen die nullter Ordnung) bis zu einer möglichst hohen Ordnung an einer bestimmten, vorgeschriebenen Stelle im Approximationsbereich verschwinden. Die zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade werden für dieses Ziel eingesetzt. Vorausgesetzt wird dabei natürlich die Existenz der Ableitungen. Bei Anwendung des Kriteriums maximaler Ebnung wird die Approximation nur an der vorgeschriebenen Stelle und in einer gewissen Umgebung recht gut sein. Beispiele finden sich in [24].

Eine weitere Möglichkeit für die Wahl eines Fehlerkriteriums besteht in der Methode der Interpolation. Die Forderung erschöpft sich in der Übereinstimmung von Vorschrift und Ist-Funktion an gewissen, vorgegebenen Punkten innerhalb des Approximationsbereichs. Darin liegt auch der Nachteil der Methode, daß über den Fehlerverlauf zwischen diesen diskreten Punkten keinerlei Aussage gemacht werden kann.

Ebenso wie bei der Approximation einer Gruppenlaufzeitvorschrift soll im Rahmen dieser Arbeit auch bei der gleichzeitigen Approximation einer Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitvorschrift die Tschebyscheff-Norm als Fehlerkriterium verwendet werden.

## 6. Gleichzeitige Approximation mit Hilfe eines Optimierungsverfahrens sowie entsprechender Fehlergewichtung

Ähnlich wie im Teil II, Kapitel 6, besteht das hier beschriebene Verfahren zur gleichzeitigen Approximation einer Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitvor-

schrift neben einer äußeren Schleife auch aus einer inneren, in der die Optimierung erfolgt.

Zunächst sei das Verfahren kurz skizziert:

In der äußeren Schleife werden die gewichtete Dämpfungs-Fehlerfunktion  $g_a(\omega, \underline{x}, \gamma_1)$  sowie die gewichtete Gruppenlaufzeit-Fehlerfunktion  $g_{TG}(\omega, \underline{x}, \gamma_2)$  jeweils neu definiert, während in der inneren Schleife die aus  $g_a(\omega, \underline{x}, \gamma_1)$  und  $g_{TG}(\omega, \underline{x}, \gamma_2)$  gebildete Fehlerquadratsumme mit Hilfe eines Optimierungsverfahrens minimiert wird.

Die Definition der toleranz-normierten Dämpfungs-Fehlerfunktion  $f_a(\omega, \underline{x})$  lautet:

$$f_a(\omega, \underline{x}) = \frac{a(\omega, \underline{x}) - a_S(\omega)}{d_a(\omega)} \quad \text{(III. 6. 1)}$$

Die toleranz-normierte Gruppenlaufzeit-Fehlerfunktion  $f_{TG}(\omega, \underline{x})$  ist durch

$$f_{TG}(\omega, \underline{x}) = \frac{t_G(\omega, \underline{x}) - t_{GS}(\omega)}{d_{TG}(\omega)} \quad \text{(III. 6. 2)}$$

gegeben.

Die Funktionen  $d_a(\omega)$  bzw.  $d_{TG}(\omega)$  stellen die mindestens stückweise stetigen Toleranzfunktionen dar, durch welche die jeweils zulässige Toleranz beschrieben wird. Die Definitionsbereiche von  $d_a(\omega)$  und  $d_{TG}(\omega)$  müssen selbstverständlich nicht miteinander übereinstimmen; die Funktionen stellen eine zweiseitige, bezüglich der Vorschrift symmetrische Toleranz dar.

Aus der Funktion  $f_a(\omega, \underline{x})$  wird nun die gewichtete Dämpfungs-Fehlerfunktion  $g_a(\omega, \underline{x}, \gamma_1)$  gebildet:

$$g_a(\omega, \underline{x}, \gamma_1) = \begin{cases} f_a(\omega, \underline{x}) - \gamma_1, & \text{falls } f_a(\omega, \underline{x}) > \gamma_1 \\ 0, & \text{" } |f_a(\omega, \underline{x})| \leq \gamma_1 \\ f_a(\omega, \underline{x}) + \gamma_1, & \text{" } f_a(\omega, \underline{x}) < -\gamma_1 \end{cases} \quad (\text{III. 6. 3})$$

Entsprechend erhält man aus  $f_{TG}(\omega, \underline{x})$  die gewichtete Gruppenlaufzeit-Fehlerfunktion  $g_{TG}(\omega, \underline{x}, \gamma_2)$ :

$$g_{TG}(\omega, \underline{x}, \gamma_2) = \begin{cases} f_{TG}(\omega, \underline{x}) - \gamma_2, & \text{falls } f_{TG}(\omega, \underline{x}) > \gamma_2 \\ 0, & \text{" } |f_{TG}(\omega, \underline{x})| \leq \gamma_2 \\ f_{TG}(\omega, \underline{x}) + \gamma_2, & \text{" } f_{TG}(\omega, \underline{x}) < -\gamma_2 \end{cases} \quad (\text{III. 6. 4})$$

Der Parameter  $\gamma_1$  stellt dabei die Dämpfungsfehler-Gewichtsschranke,  $\gamma_2$  die Gruppenlaufzeitfehler-Gewichtsschranke dar. Es werden also bei den Fehlerfunktionen  $g_a(\omega, \underline{x}, \gamma_1)$  und  $g_{TG}(\omega, \underline{x}, \gamma_2)$  nur solche Fehler berücksichtigt, die betragsmäßig größer als  $\gamma_1$  (bei Dämpfungsfehlern) bzw.  $\gamma_2$  (bei Gruppenlaufzeitfehlern) sind.

Aus  $g_a(\omega, \underline{x}, \gamma_1)$  und  $g_{TG}(\omega, \underline{x}, \gamma_2)$  wird die Fehlerquadratsumme  $FQS(\underline{x}, \gamma_1, \gamma_2)$  gebildet:

$$FQS(\underline{x}, \gamma_1, \gamma_2) = \sum_{i=1}^r g_a^2(\omega_i, \underline{x}, \gamma_1) + \sum_{i=1}^s g_{TG}^2(\omega_i, \underline{x}, \gamma_2) \quad (\text{III. 6. 5})$$

Die Anzahl der Stützstellen für die Dämpfungsfunktion ist durch  $r$  gegeben, während  $s$  die Anzahl der Stützstellen der Gruppenlaufzeitfunktion darstellt.

Die Funktion  $FQS(\underline{x}, \gamma_1, \gamma_2)$  hat zwei wichtige Eigenschaften:

- a)  $FQS(\underline{x}, \gamma_1, \gamma_2)$  ist nach den Parametern  $\underline{x}$  zweimal differenzierbar. Die zweiten Ableitungen sind jedoch nicht mehr stetig. Wird ein Verfahren verwendet, das stetige zweite Ableitungen voraussetzt, dann hat das eine geringere Konvergenzgeschwindigkeit zur Folge.

- b)  $FQS(\underline{x}^*, \gamma_1, \gamma_2) = 0$ , wenn die beiden folgenden Ungleichungen erfüllt sind, wobei  $\underline{x}^*$  der Parametervektor der erreichten Approximation ist:

$$|a(\omega, \underline{x}^*) - a_S(\omega)| \leq \gamma_1 \cdot d_a(\omega) \quad \forall \omega \in [\omega_1, \omega_r] \quad (\text{III. 6. 6})$$

$$|t_G(\omega, \underline{x}^*) - t_{GS}(\omega)| \leq \gamma_2 \cdot d_{TG}(\omega) \quad \forall \omega \in [\omega_1, \omega_s] \quad (\text{III. 6. 7})$$

Die Approximationsintervalle  $[\omega_1, \omega_r]$  und  $[\omega_1, \omega_s]$  müssen in keinem Punkt übereinstimmen.

Der Zusammenhang zwischen  $f_a(\omega, \underline{x})$  und  $g_a(\omega, \underline{x}, \gamma_1)$  sowie  $f_{TG}(\omega, \underline{x})$  und  $g_{TG}(\omega, \underline{x}, \gamma_2)$  ist im Bild III. 3 veranschaulicht.

Bei dem im folgenden beschriebenen Verfahren handelt es sich um eine Intervallschachtelung, allerdings von zwei Intervallen.

Zu Beginn der Approximation werden die Gewichtsschranken  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  gewählt, dann wird  $FQS(\underline{x}, \gamma_1, \gamma_2)$  gebildet und mit Hilfe eines Optimierungsverfahrens minimiert. Das Ergebnis dieses ersten Approximationsschritts ist der neue Parametervektor  $\underline{x}_1$ . Nun werden die Gewichtsschranken  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  gewählt. Diese Wahl hängt vom Verlauf der Funktionen  $f_a(\omega, \underline{x}_1)$  und  $f_{TG}(\omega, \underline{x}_1)$  ab, vor allem von der Anzahl der Extrema und ihrer Größe. Da zwischen der Länge der Dämpfungs- und Gruppenlaufzeit-Alternante und dem Grad  $n$  der Übertragungsfunktion  $H(p)$  offensichtlich kein Zusammenhang besteht, ist man bei der Beurteilung, wie stark man  $f_a(\omega, \underline{x}_1)$  und  $f_{TG}(\omega, \underline{x}_1)$  noch verkleinern kann, auf etwas Intuition und Erfahrung angewiesen, ähnlich wie bei der Approximation einer Gruppenlaufzeitvorschrift. Sind die toleranz-normierten Fehlerfunktionen  $f_a(\omega, \underline{x}_1)$  und  $f_{TG}(\omega, \underline{x}_1)$  noch unausgeglichen, so wählt man  $\gamma_1 < f_{a \max}(\omega, \underline{x}_1)$  und  $\gamma_2 < f_{TG \max}(\omega, \underline{x}_1)$ . Von dieser Unausgeglichenheit, also dem Verhältnis zwischen dem größten und dem kleinsten Fehler, hängt es ab, um wieviel man  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  verkleinert. Dann wird die neu gebildete Funktion  $FQS(\underline{x}_1, \gamma_1, \gamma_2)$  in der inneren Schleife des Verfahrens minimiert. In der äußeren Schleife gibt man also im Dialogbetrieb die Gewichtsschranken  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  ein, in der inneren

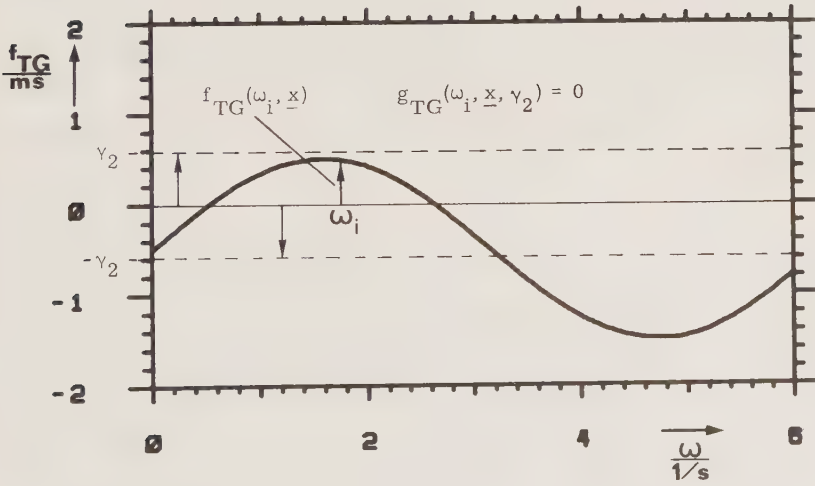
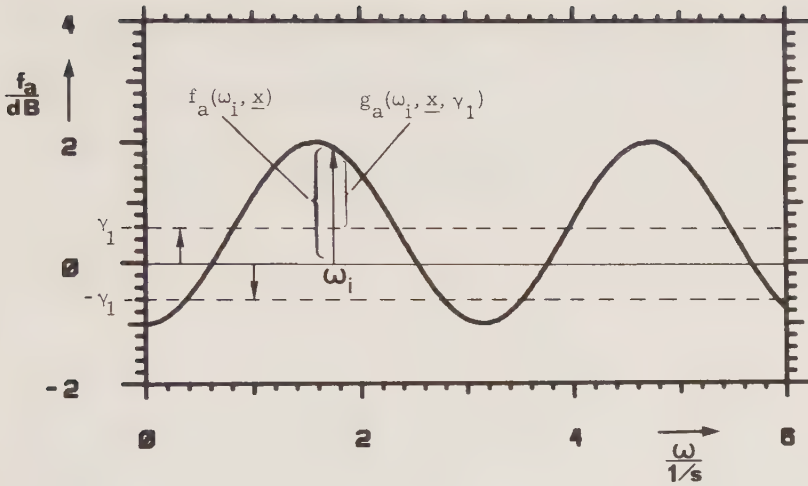


Bild III.3: Zusammenhang zwischen den toleranz-normierten und gewichteten Fehlerfunktionen

Schleife erfolgt die Fehlerquadratsummenminimierung. Es ist zweckmäßig, beide Fehler im gleichen Maße zu verringern, das heißt, es soll nicht eine Fehlerkurve gleichmäßig gemacht werden auf Kosten der anderen. Denn beim nachfolgenden "Gleichmäßig-Machen" der anderen muß man zwangsläufig zulassen, daß der vorher gleichmäßige Fehler der ersten Kurve wieder ungleichmäßig wird. Die Maximalfehler von Dämpfung und Gruppenlaufzeit müssen also gegeneinander abgewogen werden. Das Verfahren ist beendet, wenn beide Fehlerfunktionen einen gleichmäßigen Verlauf haben.

Der erste Approximationsschritt besteht zweckmäßigerweise meist aus einer reinen Fehlerquadratsummenapproximation, man setzt  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ . In der Regel führt das zu einer erheblichen Verbesserung des Startvektors  $\underline{x}$ . Die Wahl  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$  kann aber auch dann günstig sein, wenn beide Fehlerverläufe nicht gleichmäßig gemacht werden können. Hier kann ein Fehlerquadratsummensschritt von einem ungünstigen Parametervektor zu einem günstigeren führen.

Eine zu rigorose Verringerung während des normalen Ablaufs kann jedoch auch zu einer Vergrößerung der Maximalfehler führen.

Das im Dialogbetrieb durchzuführende Verfahren ist in Kurzform im Bild III.4 dargestellt.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß man im Gegensatz etwa zur Approximation einer Dämpfungsvorschrift bei der gleichzeitigen Approximation einer Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitvorschrift nie weiß, welche Länge die Alternanten beider Fehlerfunktionen des Ergebnisses haben werden. Deshalb ist es auch unmöglich, mit einem starren Algorithmus diese Aufgabe befriedigend zu lösen. Denn es lassen sich bei der gleichzeitigen Approximation manchmal mehrere Lösungen mit gleichmäßigem Fehlerverlauf finden, wie die Beispiele im Kapitel 9 zeigen. Diese verschiedenen Lösungen unterscheiden sich nicht nur in ihrer Güte, sondern darüber hinaus teilweise auch

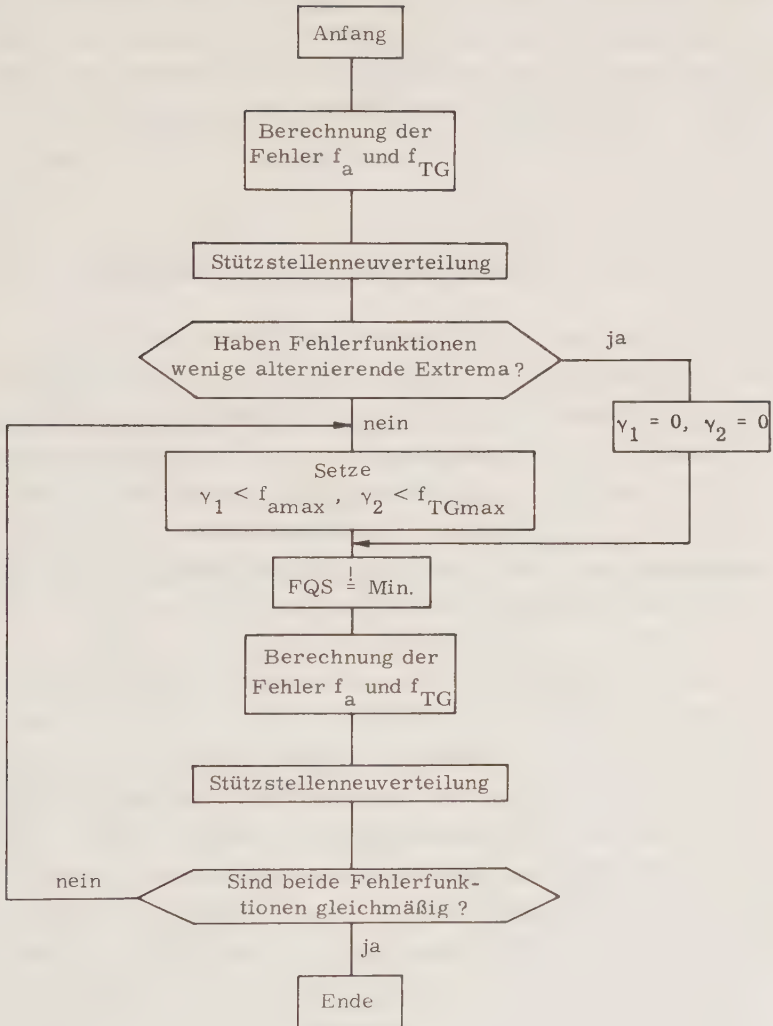


Bild III. 4: Flußdiagramm

in der Länge der Alternante einer oder beider Fehlerfunktionen. Es erscheint unmöglich, anders als im Dialogbetrieb und mit der jeweils individuellen Eingabe der Gewichtsschranken  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  zu brauchbaren Lösungen zu gelangen. Wie sich das hier vorgestellte Verfahren in der Praxis bewährt hat, darüber geben die im Kapitel 9 vorgelegten Beispiele Auskunft.

## 7. Fehlerextremwertbestimmung und Stützstellenneuverteilung

Das im Kapitel 6 beschriebene Approximationsverfahren erfordert die Diskretisierung der beiden Approximationsintervalle. Frequenzpunkte, an denen die Dämpfungsvorschrift  $a_s(\omega)$  bzw. die Gruppenlaufzeitvorschrift  $t_{GS}(\omega)$  gegeben ist, werden als Stützstellen bezeichnet. Wie im Kapitel 6 beschrieben, erfolgt bei jedem Durchlaufen der äußeren Schleife die Eingabe der Gewichtsschranken  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ . Sie richtet sich nach dem Verlauf der Fehlerfunktionen  $f_a(\omega, \underline{x})$  und  $f_{TG}(\omega, \underline{x})$ , vor allem nach deren Extrema. Deshalb ist es notwendig, sämtliche Extrema von  $f_a(\omega, \underline{x})$  und  $f_{TG}(\omega, \underline{x})$  genau zu bestimmen.

Voraussetzung dafür ist, daß die Vorschriften durch ausreichend viele Stützstellen genügend genau beschrieben sind. Ist dies nicht der Fall, dann können Interpolationsfehler auftreten, die unter Umständen größer sind als die Approximationsfehler. Deshalb muß man bei formelmäßig vorgeschriebenen Sollfunktionen neben wenigen Stützstellen noch genügend Frequenzpunkte als Zwischenpunkte zulassen, deren Sollwerte dann in einem Programm aus der jeweiligen Vorschrift berechnet werden können. Falls die Vorschriften nur punktweise gegeben sind und keine Geraden darstellen, werden hinreichend viele Stützstellen benötigt, um die Vorschrift genau genug beschreiben zu können.

Im Fall der gleichzeitigen Approximation sind also vor jeder Eingabe der Gewichtsschranken  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  die Extrema der Funktionen  $f_a(\omega, \underline{x})$  sowie  $f_{TG}(\omega, \underline{x})$  zu bestimmen und auf dem Bildschirm, über den der Dialogbetrieb

erfolgt, auszugeben. Unmittelbar nach dieser Fehlerextremwertbestimmung erfolgt für beide Approximationsintervalle eine voneinander unabhängige Stützstellenneuverteilung. Sie stellt sicher, daß jedes Extremum durch eine Stützstelle erfaßt ist, und daß die Stützstellen in der Nähe der Extrema dichter gelegt werden, als dies in anderen Bereichen geschieht.

Diese Stützstellenneuverteilung entspricht einer zusätzlichen Fehlergewichtung. Große Fehler gehen in die Fehlerquadratsumme  $FQS(\underline{x}, \gamma_1, \gamma_2)$  auch über die größere Stützstellendichte in ihrer Umgebung ein. Deshalb hat auch diese Neuverteilung einen großen Einfluß auf die Optimierung.

Man sollte nur so viele Stützstellen und Zwischenpunkte nehmen, wie es Extremwertbestimmung und Sollfunktionsbeschreibung erfordern. Denn ihre Anzahl geht entscheidend in die Rechenzeit ein. Gerade beim Dialogbetrieb ist man an einer kurzen Rechenzeit interessiert, da man sonst zu viel Zeit mit Warten verliert.

Was die Methoden betrifft, mit deren Hilfe die Extrema rationell bestimmt werden können und die Stützstellen den Extrema gemäß neu verteilt werden, sei auf die Ausführungen von Teil II, Kapitel 7, hingewiesen.

## 8. Berücksichtigung von Nebenbedingungen

Bei der Approximation gibt es häufig Nebenbedingungen, die zusätzliche Vorschriften darstellen und teilweise im Hinblick auf eine spätere Realisierung von Bedeutung sind. Das Einhalten der in diesem Kapitel beschriebenen Nebenbedingungen erfordert keine Einschränkung der zur Optimierung verwendeten Parameter.

Die Berücksichtigung von Nebenbedingungen führt aber in manchen Fällen zu einer Erschwerung der Approximation, so daß derartige Lösungen dann eine kürzere Alternante und betragsmäßig größere Fehler haben können, als dies bei Lösung von Problemen ohne Nebenbedingungen der Fall ist.

Während die Nebenbedingungen a - c unterschiedlicher Art sind, ist für die Nebenbedingungen d und e charakteristisch, daß sie im Hinblick auf eine spätere Realisierung gestellt werden. Im Abschnitt f soll eine spezielle Struktur erhalten bleiben.

Von besonderem Interesse für die passive Realisierung ist die Realisierung einer Übertragungsfunktion  $H(p)$  durch ein LC-Zweitor. Eine Bedingung dafür ist, daß das Zählerpolynom von  $H(p)$  eine gerade oder ungerade Funktion sein muß. Unter diesem Gesichtspunkt ist die im Abschnitt d gestellte Forderung als Teilforderung von Abschnitt e aufzufassen. Übertragungsfunktionen, welche der Nebenbedingung dieses Abschnitts genügen, können als LC-Zweitore realisiert werden.

Die in diesem Kapitel beschriebenen und bis auf Abschnitt f in einem Programm verwirklichten Nebenbedingungen sind programmtechnisch einfach zu realisieren. Auch im Hinblick auf die Handlichkeit und Überschaubarkeit bestehen keinerlei Bedenken, die gegen eine Integration solcher Nebenbedingungen in ein Programm zur gleichzeitigen Approximation sprechen.

#### a) Einseitige Dämpfungsforderungen

Sie kommen oft vor und lassen sich in einem Programm recht einfach berücksichtigen. Bild I. 2 zeigt eine solche einseitige Dämpfungsforderung. Wenn an Stützstellen  $\omega_k$  Mindest- oder Maximaldämpfungen  $a_{Nk}(\omega_k)$  vorgeschrieben sind, dann lauten die entsprechenden Forderungen gemäß (I. 3. 8) und (I. 3. 9):

$$\begin{aligned} a(\omega_k) &< a_{Nk}(\omega_k) & k = 1, \dots, M_a & \text{ (Maximaldämpfung) } \\ a(\omega_k) &> a_{Nk}(\omega_k) & k = 1, \dots, M_i & \text{ (Mindestdämpfung) } \end{aligned}$$

Bei der Angabe einer solchen einseitigen Dämpfungsforderung kann man noch einen Gewichtungsfaktor  $\gamma_N$  sowie eine Fehlerfunktion  $f_{aN}(\omega, \underline{x})$  einführen.

Für Maximaldämpfung ergibt sich:

$$f_{aN}(\omega, \underline{x}) = \begin{cases} a(\omega, \underline{x}) - a_N, & \text{falls } a(\omega, \underline{x}) > a_N \\ 0, & \text{" } a(\omega, \underline{x}) \leq a_N \end{cases}$$

(III. 8. 1)

Für Mindestdämpfung erhält man:

$$f_{aN}(\omega, \underline{x}) = \begin{cases} a(\omega, \underline{x}) - a_N, & \text{falls } a(\omega, \underline{x}) < a_N \\ 0, & \text{" } a(\omega, \underline{x}) \geq a_N \end{cases}$$

(III. 8. 2)

Mit Hilfe des Gewichtungsfaktors  $\gamma_N$  läßt sich die gewichtete Fehlerfunktion  $g_{aN}(\omega, \underline{x}, \gamma_N)$  bestimmen:

$$g_{aN}(\omega, \underline{x}, \gamma_N) = \frac{f_{aN}(\omega, \underline{x})}{\gamma_N} \quad \text{(III. 8. 3)}$$

Der Fehlervektor  $\underline{z}(\underline{x})$  wird um die Fehler an den Stützstellen mit einseitiger Dämpfungsvorschrift erweitert. Die Fehlerquadratsumme enthält  $\gamma_N$ , falls  $\gamma_N \neq 1$  ist, als zusätzliche Variable, also  $FQS = FQS(\underline{x}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_N)$ .

Mit der Wahl von  $\gamma_N$  läßt sich nun genau festlegen, wie streng einseitige Dämpfungsvorschriften eingehalten werden sollen.

Bei Wahl von  $\gamma_N = 1$  erfolgt die Gewichtung so, daß die "einseitigen" und "zweiseitigen" Dämpfungsfehler direkt miteinander verglichen werden können, denn dann gilt:

$$g_{aN}(\omega, \underline{x}, \gamma_N) = f_{aN}(\omega, \underline{x}) .$$

Ferner ist die Fehlerfunktion bei einer zweiseitigen Dämpfungsforderung, also  $f_a(\omega, \underline{x})$ , auf die zulässige Toleranz,  $d_a(\omega)$ , bezogen. Die Wahl von  $\gamma_N = 1$  bewirkt deshalb, daß einseitige Dämpfungsforderungen entweder erfüllt werden oder in gleichem Maße verletzt werden wie die Sollfunktion  $a_S(\omega)$ . Denn die Fehler der einseitigen Dämpfungsvorschriften werden in diesem Falle nur dann programmtechnisch besonders berücksichtigt, wenn sie die

Fehler der zweiseitigen Vorschriften übertreffen. Bei Wahl von  $\gamma_N = 1$  werden also die Extrema beider Fehlerfunktionen in gleichem Maße bewertet.

Will man die Verletzung einer einseitigen Dämpfungsforderung unbedingt ausschließen, dann muß man  $\gamma_N \ll 1$  wählen.

Im allgemeinen ist es vernünftig,  $\gamma_N = 1$  zu wählen; denn es ist in den meisten Fällen kein triftiger Grund zu erkennen, warum einseitige Dämpfungsforderungen besser erfüllt werden sollten als zweiseitige.

b) Mindestabstand der Pole von der imaginären Achse der p-Ebene

Aus den im Teil II, Kapitel 8, aufgeführten Gründen wird an die Approximation manchmal die Forderung gestellt, daß die Pole der Übertragungsfunktion  $H(p)$  einen vorgeschriebenen Mindestabstand  $\epsilon > 0$  von der imaginären Achse der p-Ebene einhalten sollen. Diese Forderung läßt sich durch eine Parametertransformation leicht erfüllen, wobei die bisherigen Realteile der Pole durch Realteile ersetzt werden, die den Mindestabstand enthalten:

$$\operatorname{Re} \{p_{\infty}\}_{\text{neu}} = \operatorname{Re} \{p_{\infty}\}_{\text{alt}} + \epsilon \quad (\text{III. 8. 4})$$

Bild III. 5 zeigt das Ergebnis einer gleichzeitigen Approximation mit vorgeschriebenem Mindestabstand  $\epsilon$ .

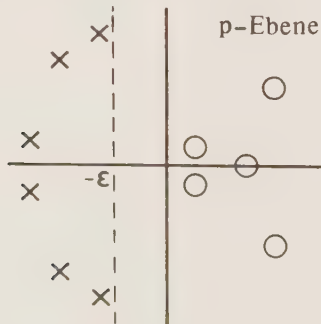


Bild III. 5: Pol-Nullstellen-Diagramm bei vorgeschriebenem Mindestabstand  $\epsilon$

Das Einführen eines Mindestabstands  $\epsilon$  verändert die Übertragungsfunktion  $H(p)$ .

$$H(p) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{\lambda} (p - a_i) \cdot \prod_{i=1}^1 [(p - b_i)^2 + c_i^2]}{\prod_{i=1}^n (p + d_i^2 + \epsilon) \cdot \prod_{i=1}^k [(p + e_i^2 + \epsilon)^2 + f_i^2]} \quad (\text{III. 8. 5})$$

Entsprechend ergeben sich andere Gleichungen für die Dämpfung  $a(\omega, \underline{x})$  und die Gruppenlaufzeit  $t_G(\omega, \underline{x})$ :

$$a(\omega, \underline{x}) = -20 \lg \left| K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{\lambda} (j\omega - a_i)}{\prod_{i=1}^n (j\omega + d_i^2 + \epsilon)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^1 (-\omega^2 + b_i^2 - 2j\omega b_i^2 + c_i^2)}{\prod_{i=1}^k (-\omega^2 + e_i^4 + \epsilon^2 + 2e_i^2\epsilon + 2j\omega e_i^2 + 2j\omega\epsilon + f_i^2)} \right| \quad (\text{III. 8. 6})$$

$$\begin{aligned} t_G(\omega, \underline{x}) &= \sum_{i=1}^1 \frac{2b_i^2 (\omega^2 + b_i^2 + c_i^2)}{(\omega^2 - b_i^2 - c_i^2)^2 + 4b_i^2 \omega^2} + \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{a_i}{\omega^2 + a_i^2} + \\ &+ \sum_{i=1}^k \frac{2 \cdot (e_i^2 + \epsilon) \cdot (\omega^2 + e_i^4 + \epsilon^2 + f_i^2 + 2e_i^2\epsilon)}{4\omega^2 (e_i^2 + \epsilon)^2 + (-\omega^2 + e_i^4 + \epsilon^2 + f_i^2 + 2e_i^2\epsilon)^2} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{d_i^2 + \epsilon}{(d_i^2 + \epsilon)^2 + \omega^2} - t_0 \end{aligned} \quad (\text{III. 8. 7})$$

c) Einschränkung des Variationsbereichs der Gruppenlaufzeitkonstante

Bei manchen Problemstellungen besteht die zusätzliche Forderung, daß die Gruppenlaufzeitkonstante  $t_0$  einen Maximalwert nicht überschreiten darf. Durch eine Parametertransformation, wie sie durch (II.8.1) gegeben ist, läßt sich eine derartige Forderung erfüllen.

d) Festhalten einzelner Parameter

Das Festhalten einzelner Parameter wird häufig wegen der nachfolgenden Realisierung gewünscht. Dabei ist der wichtigste Fall das Beibehalten von Nullstellen auf der imaginären Achse, einschließlich des Ursprungs. Es sollen also derartige Nullstellen, die aus einer sukzessiven Approximation resultieren, auch während der nachfolgenden gleichzeitigen Approximation ihre Lage nur auf der imaginären Achse ändern. Diese Forderung ist von Interesse für eine gewünschte, passive LC-Zweitorrealisierung. Hat die vorliegende Übertragungsfunktion  $H(p)$  Nullstellen nur auf der imaginären Achse, dann läßt sie sich als LC-Zweitor realisieren. Sind jedoch weitere Nullstellen vorhanden, die nicht auf der imaginären Achse liegen, dann müssen für die LC-Zweitorrealisierung die im Abschnitt e beschriebenen Bedingungen erfüllt sein bzw. durch entsprechende Maßnahmen erfüllt werden. In einem Programm kann man das Beibehalten rein imaginärer Nullstellen erreichen, indem man die entsprechenden Koeffizienten der Jacobi-Matrix gleich Null setzt, so daß dadurch die Realteile der Nullstellen als konstant, hier als Null, betrachtet und während der Optimierung nicht verändert werden.

- e) Erzeugung von Nullstellen-Quadrupeln bzw. Nullstellen -Paaren und Beibehalten dieser Struktur bei der Approximation

Diese Nebenbedingung, die für die passive LC-Realisierung Bedeutung hat, kann als eine Verschärfung der im vorhergehenden Abschnitt d betrachteten Forderung aufgefaßt werden. Es muß dafür gesorgt werden, daß Nullstellen, die nach dem ersten Schritt der sukzessiven Approximation, der Approximation der Dämpfungsvorschrift, in der offenen linken p-Halbebene liegen, spiegelbildlich zur imaginären Achse in die rechte p-Halbebene gelegt werden. Der Dämpfungsverlauf wird dadurch nicht beeinflußt. Erst dann darf die Approximation der Gruppenlaufzeitvorschrift erfolgen. Denn in der linken p-Halbebene liegende Nullstellen können sonst später nicht zur Nullstellen-Quadrupel- bzw. -Paar-Bildung verwendet werden. Das Zählerpolynom von  $H(p)$  kann in diesem Fall weder zu einer geraden noch zu einer ungeraden Funktion gemacht werden. Die nachstehend beschriebene Erweiterung soll den konstanten Faktor K unverändert lassen.

Falls die berechnete Startlösung neben Nullstellen auf der imaginären Achse auch noch solche in der offenen, rechten p-Halbebene hat, kann man durch die Bildung von Nullstellen-Quadrupeln bzw. -Paaren dafür sorgen, daß das Zählerpolynom von  $H(p)$  eine gerade oder ungerade Funktion wird. Dies bedeutet, daß eine derartige Übertragungsfunktion neben der stets möglichen aktiven Realisierung auch passiv als LC-Zweitor realisiert werden kann.

Die Erzeugung von Nullstellen-Quadrupeln bzw. - Paaren geschieht in der Weise, daß zu jeder Nullstelle in der rechten p-Halbebene ein Pol-Nullstellen-Paar spiegelbildlich zur imaginären Achse in der linken p-Halbebene an der gleichen Stelle erzeugt wird, so daß sich für die aus der so erweiterten Übertragungs-

funktion abgeleiteten Größen keinerlei Änderung ergibt. Aus zwei konjugiert komplexen Nullstellen in der rechten  $p$ -Halbebene ist so ein Quadrupel geworden. Eine reelle Nullstelle in der rechten  $p$ -Halbebene wird zu einem Nullstellen-Paar ergänzt. Die in der linken  $p$ -Halbebene erzeugten Nullstellen werden mit den in der rechten  $p$ -Halbebene liegenden zu Quadrupeln bzw. Paaren zusammengefaßt und können während der nachfolgenden Approximation nur als Quadrupel bzw. Paare variieren. Sie liefern keinen Beitrag zur Gruppenlaufzeit, können also nur den Dämpfungsverlauf beeinflussen. Im Gegensatz dazu dürfen die an gleicher Stelle erzeugten Pole frei variieren.

Die hier beschriebene Erweiterung von  $H(p)$  führt zu einer Graderhöhung, wobei jedoch die Anzahl der Freiheitsgrade nicht im gleichen Maße steigt wie bei einer freien Struktur ohne Nullstellen-Quadrupel bzw. -Paare. Mit dieser freien Struktur verglichen bekommt man nur einen halb so großen Zuwachs an frei variierbaren Parametern.

f) Beibehalten von Pol-Nullstellen-Quadrupeln bzw. Pol-Nullstellen-Paaren der Startlösung

Den Ausgangspunkt der gleichzeitigen Approximation stellt in der Regel das Ergebnis der vorhergegangenen sukzessiven Approximation dar. Diese liefert eine Übertragungsfunktion, bei der in der rechten  $p$ -Halbebene teilweise nur Nullstellen auftreten, die zusammen mit den in der linken  $p$ -Halbebene gelegenen Polen Pol-Nullstellen-Quadrupel bzw. -Paare bilden.

Die nachfolgende gleichzeitige Approximation soll nun diese Strukturen erhalten, es sollen also Pol-Nullstellen-Quadrupel bzw. -Paare erhalten bleiben. Die Vorteile der gleichzeitigen Approximation möchte man dennoch nutzen. Die Pol-Nullstellen-Quadrupel bzw. -Paare liefern keinen Beitrag zum Dämpfungsverlauf. Die

Anzahl der Freiheitsgrade einer solchen Übertragungsfunktion ist beträchtlich kleiner als bei einer gradgleichen Übertragungsfunktion ohne spezielle Struktur.

Da diese spezielle Struktur in dem aus der vorliegenden Arbeit hervorgegangenen Programm noch nicht berücksichtigt worden ist, kann über die Zweckmäßigkeit, Pol-Nullstellen-Quadrupel während der Approximation beizubehalten, noch keine Aussage gemacht werden.

g) Vergleich der drei in d - f behandelten Nebenbedingungen

Es soll hier noch ein Überblick über die drei an die Struktur von  $H(p)$  geknüpften Nebenbedingungen gegeben werden. Ferner soll an einem Beispiel gezeigt werden, wieviele Freiheitsgrade durch die in den Abschnitten d-f gestellten Nebenbedingungen verloren gehen. Es sei nochmals betont, daß Nullstellen prinzipiell nicht in der offenen linken p-Halbebene außer in Quadrupel- oder Paar-Struktur vorkommen sollen, weil sonst eine reine LC-Realisierung auch durch Erweiterung nicht mehr zu erreichen ist.

Im Hinblick auf die Realisierung wurden drei verschiedene Forderungen gestellt, wobei die Forderungen B und C viel einschränkender sind als die Forderung A.

- A) Nullstellen auf der imaginären Achse dürfen nur längs dieser variieren
- B) Nullstellen kommen außer auf der imaginären Achse nur als Bestandteil von Nullstellen-Quadrupeln bzw. - Paaren vor, was durch eine entsprechende Erweiterung möglich ist
- C) Die Struktur von Pol-Nullstellen-Quadrupeln bzw. -Paaren der Startlösung soll erhalten bleiben

Im Bild III. 6 sind die Pol-Nullstellen-Diagramme für drei gradgleiche Übertragungsfunktionen  $H_A(p)$ ,  $H_B(p)$  und  $H_C(p)$  angegeben, wobei  $H_A(p)$  der Nebenbedingung A,  $H_B(p)$  der Nebenbedingung B und  $H_C(p)$  der Nebenbedingung C genügt.

Bei einer Übertragungsfunktion  $H(p)$  ohne Nebenbedingung an die Pol-Nullstellen-Struktur dürfen die Nullstellen auf der imaginären Achse sich von dieser während der Approximation entfernen. Die Anzahl der Freiheitsgrade beträgt dann

$$NF = 2 \cdot (1+k) + \lambda + \mu + 1 = 14 .$$

Die im Bild III. 6 durch ihre jeweiligen Pol-Nullstellen-Diagramme gekennzeichneten Übertragungsfunktionen  $H_A(p)$ ,  $H_B(p)$  und  $H_C(p)$  haben dagegen weniger Freiheitsgrade, wie aus dem folgenden Vergleich hervorgeht:

A)  $NF = 13$

B)  $NF = 11$

C)  $NF = 11$

Entsprechend dem Verlust von Freiheitsgraden kann man erwarten, daß die erreichbaren Approximationsergebnisse schlechter sind. Es hat sich jedoch gezeigt, daß die Nebenbedingung A die Approximation nur unwesentlich erschwert, da die konjugiert komplexen Nullstellen auf der imaginären Achse nur auf den Dämpfungsverlauf im Bereich einseitiger Dämpfungsforderungen wesentlichen Einfluß nehmen, was durch Beispiele bestätigt wird. Einschneidender dagegen sind die Nebenbedingungen B und C.

Zu A und B sind im nächsten Kapitel Beispiele aufgeführt.

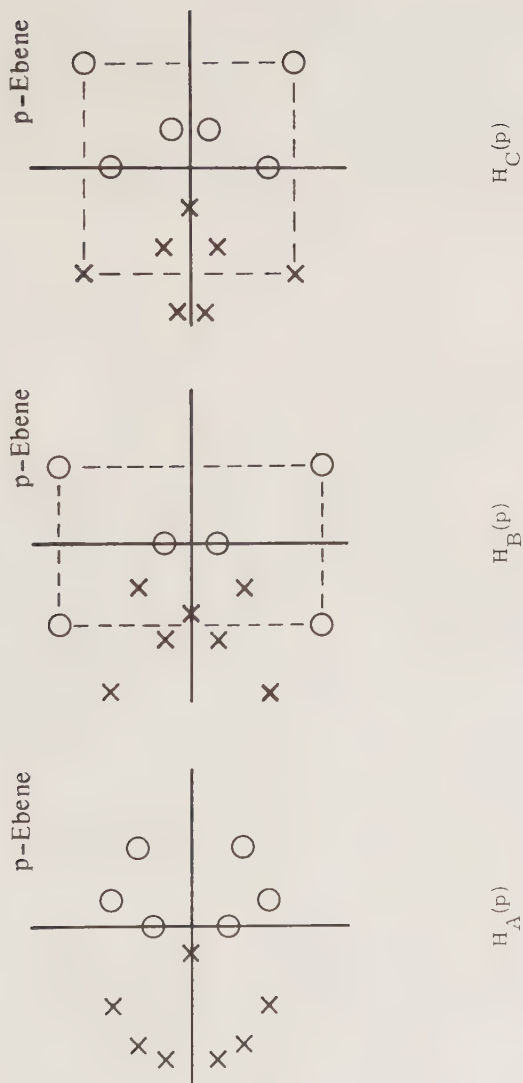


Bild III. 6: Pol-Nullstellen-Diagramme der Übertragungsfunktionen  $H_A(p)$ ,  $H_B(p)$  und  $H_C(p)$ .

## 9. Beispiele

Stellvertretend für die gelösten Approximationsaufgaben sollen hier vier beschrieben werden. Wie im Teil II, Kapitel 9, wurden die normierte Frequenz  $\Omega$  und die normierte Gruppenlaufzeit  $T_G$  verwendet. Entsprechend ist auch die Gruppenlaufzeit-Toleranz auf die Bezugsfrequenz  $f_B$  normiert. Die genannten Fehler sind nicht auf die zulässigen Toleranzen bezogen. Die Umrechnung der unnormierten Gruppenlaufzeit  $t_G(\omega)$  in die normierte Gruppenlaufzeit  $T_G(\Omega)$  erfolgt durch folgende Gleichung:

$$T_G(\Omega) = 2\pi \cdot f_B \cdot t_G(\omega) \quad (\text{III. 9. 1})$$

Entsprechend dieser Gleichung wird aus einer Toleranz  $d(\omega)$  die frequenznormierte Toleranz  $d(\Omega)$ .

Das Hauptinteresse bei allen Beispielen liegt auf dem Vorteil, den die gleichzeitige gegenüber der sukzessiven Approximation bei gleichem oder geringerem Grad von  $H(p)$  bietet. Deshalb sind stets die Ergebnisse von sukzessiver und gleichzeitiger Approximation miteinander verglichen. Bei einigen Beispielen wurde die gleichzeitige Approximation mit einem niedrigeren Grad durchgeführt. Trotzdem wurde ein besseres Ergebnis erzielt, als dies bei der sukzessiven Approximation der Fall war. Außerdem wurden Nebenbedingungen beachtet, wie einseitige Dämpfungsforderungen, Festhalten von Nullstellen auf der imaginären Achse sowie teilweise Einhalten eines Mindestabstands  $\epsilon$  der Pole von der imaginären Achse der  $p$ -Ebene, Erzeugung von Nullstellen-Quadrupeln und Beibehalten dieser Struktur während der Approximation.

Bei einigen Approximationen ergaben sich durch unterschiedliche Strategie bei der Fehlergewichtung verschiedene Lösungen, die sich in jedem Fall durch ihre Güte, teilweise auch durch die Länge der Alternanten unterschieden. Diese verschiedenen Lösungen sind nicht in allen Fällen durch ihre Fehlerkurven vertreten oder überhaupt erwähnt. Es sei darauf hinge-

wiesen, daß bei jedem der vier Beispiele die Approximation mit der angegebenen Startlösung erfolgt ist, und daß die bei einigen Beispielen verschiedenen Lösungen nicht etwa auf jeweils anderen Startlösungen beruhen.

In jedem Fall wurde zunächst eine Approximation der Dämpfungsvorschrift durchgeführt, dann eine Approximation der Gruppenlaufzeitvorschrift, die teilweise von Hand nach den im Teil II, Kapitel 3, beschriebenen Methoden erfolgte oder mit einem Programm, das aus dem im Teil II geschilderten Verfahren entstand.

### Beispiel 1

$$\begin{aligned} \text{Vorschrift: } 0,78 \leq \Omega \leq 0,96 & \quad a_N(\Omega) \geq 40 \text{ dB} \\ 1,065 \leq \Omega \leq 1,215 & \quad a_S(\Omega) = 0,5 \text{ dB} \pm 0,5 \text{ dB} \\ 1,065 \leq \Omega \leq 1,215 & \quad T_G(\Omega) = 0,0 \pm 1,5 \end{aligned}$$

Die Konstante war gegeben,  $K = 0,02682776$ .

Bild III. 7 zeigt die Dämpfungsvorschrift, Bild III. 8 die Gruppenlaufzeitvorschrift. Die Bezugsfrequenz war  $f_B = 10 \text{ kHz}$ . Die nachfolgende Tabelle gibt das Ergebnis der sukzessiven Approximation wieder, welches als Startlösung fungierte und 1sukz. genannt ist.

#### Parameterwerte der Startlösung 1sukz.

$$\begin{aligned} p_o &= 0,0 & (\text{festgehalten}) \\ p_o &= 0,0 \pm 0,9508110000 \text{ j} & (\text{Realteil festgehalten}) \\ p_o &= 0,0 \pm 0,8318470000 \text{ j} & ( \quad " \quad " \quad ) \\ p_o &= 0,08896362750 \pm 1,157790770 \text{ j} \\ p_\infty &= - 0,08896362750 \pm 1,157790770 \text{ j} \\ p_\infty &= - 0,01414230000 \pm 1,032714000 \text{ j} \\ p_\infty &= - 0,05057180000 \pm 1,213000000 \text{ j} \\ p_\infty &= - 0,05090850000 \pm 1,087743000 \text{ j} \\ t_0 &= 39,85827740 \end{aligned}$$

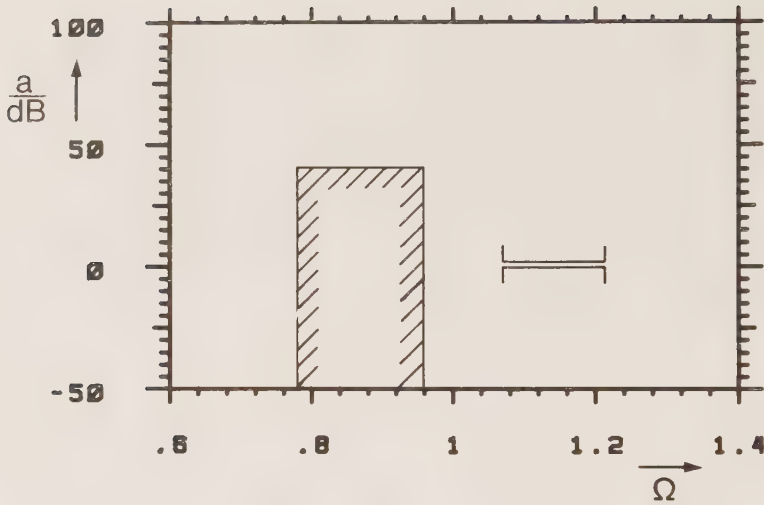


Bild III, 7: Dämpfungsvorschrift für Beispiel 1

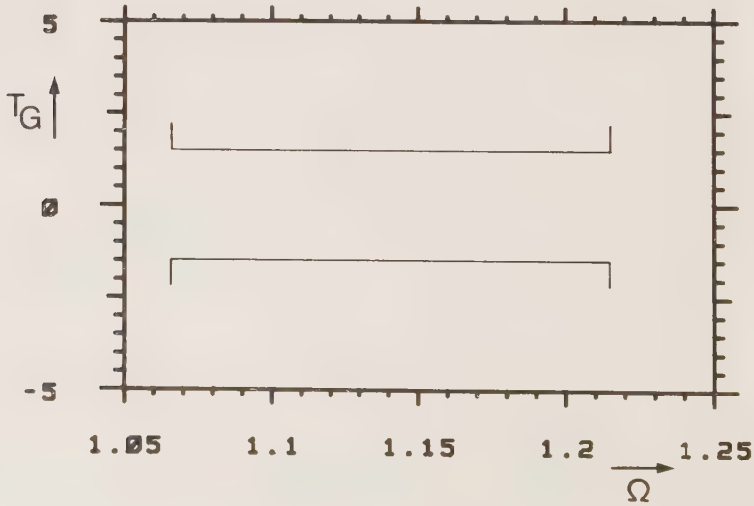


Bild III, 8: Gruppenlaufzeitvorschrift für Beispiel 1

Die gleichzeitige Approximation lieferte drei Lösungen unterschiedlicher Güte, die mit 1Agleich., 1Bgleich. und 1Cgleich. bezeichnet sind. Die zugehörigen Parameterwerte sind im folgenden aufgeführt:

Parameterwerte der Lösung 1Agleich.

|                |                                      |                         |
|----------------|--------------------------------------|-------------------------|
| $p_o =$        | 0, 0                                 | (festgehalten)          |
| $p_o =$        | 0, 0 $\pm$ 0, 9206754760 j           | (Realteil festgehalten) |
| $p_o =$        | 0, 0 $\pm$ 0, 9206961285 j           | ( " " )                 |
| $p_o =$        | 0, 09663709660 $\pm$ 1, 162405898 j  |                         |
| $p_\infty = -$ | 0, 05259777193 $\pm$ 1, 082044489 j  |                         |
| $p_\infty = -$ | 0, 008767829084 $\pm$ 1, 034403171 j |                         |
| $p_\infty = -$ | 0, 04847855309 $\pm$ 1, 226994040 j  |                         |
| $p_\infty = -$ | 0, 06917156774 $\pm$ 1, 152362235 j  |                         |
| $t_0 =$        | 38, 05331888                         |                         |

Parameterwerte der Lösung 1Bgleich.

|                |                                      |                         |
|----------------|--------------------------------------|-------------------------|
| $p_o =$        | 0, 0                                 | (festgehalten)          |
| $p_o =$        | 0, 0 $\pm$ 0, 9136219223 j           | (Realteil festgehalten) |
| $p_o =$        | 0, 0 $\pm$ 0, 9136257175 j           | ( " " )                 |
| $p_o =$        | 0, 09767627665 $\pm$ 1, 161921947 j  |                         |
| $p_\infty = -$ | 0, 05402290931 $\pm$ 1, 081569656 j  |                         |
| $p_\infty = -$ | 0, 009650991866 $\pm$ 1, 032588815 j |                         |
| $p_\infty = -$ | 0, 04947211842 $\pm$ 1, 227196202 j  |                         |
| $p_\infty = -$ | 0, 07103622016 $\pm$ 1, 152328684 j  |                         |
| $t_0 =$        | 37, 67500115                         |                         |

Parameterwerte der Lösung 1Cgleich.

|              |                                     |                         |
|--------------|-------------------------------------|-------------------------|
| $p_o =$      | 0, 0                                | (festgehalten)          |
| $p_o =$      | 0, 0 $\pm$ 0,8987579982 j           | (Realteil festgehalten) |
| $p_o =$      | 0, 0 $\pm$ 0,9254911477 j           | ( " " )                 |
| $p_o =$      | 0,09150093963 $\pm$ 1,158938087 j   |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,05316692198 $\pm$ 1,081172739 j |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,01130240514 $\pm$ 1,031480722 j |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,04812565237 $\pm$ 1,222186602 j |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,07071307881 $\pm$ 1,149402628 j |                         |
| $t_0 =$      | 39,02931806                         |                         |

Zunächst werden die Startlösungen 1sukz. und die Lösung 1Bgleich. miteinander verglichen. Bild III. 9 zeigt den Dämpfungsverlauf von 1sukz. sowie der Lösung 1Bgleich., Bild III. 10 den Dämpfungs-Fehlerverlauf und Bild III. 11 den Gruppenlaufzeit-Fehlerverlauf.

Als nächstes wurden die drei verschiedenen Lösungen 1Agleich., 1Bgleich. und 1Cgleich. miteinander verglichen. Bild III. 12 stellt den Dämpfungsverlauf dar, Bild III. 13 den Dämpfungs-Fehlerverlauf und Bild III. 14 den Gruppenlaufzeit-Fehlerverlauf.

Dabei ist auffallend, daß die beiden konjugiert komplexen Nullstellen auf der imaginären Achse bei den Lösungen 1Agleich. und 1Bgleich. zusammenfallen, und zwar bei jeweils verschiedenen Punkten. Die übrigen Parameterwerte liegen ziemlich dicht beieinander.

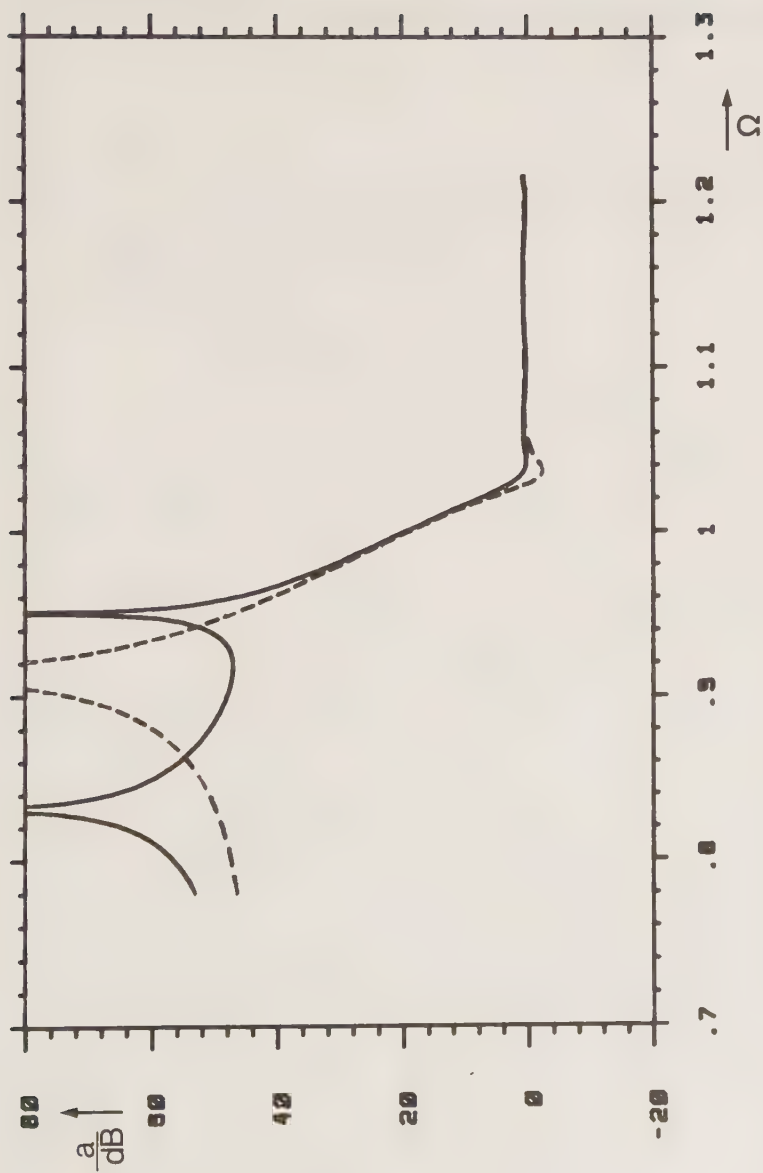


Bild III. 9: Dämpfungsverlauf von 1sukz. und 1Bgleich. ——— 1sukz. ----- 1Bgleich.

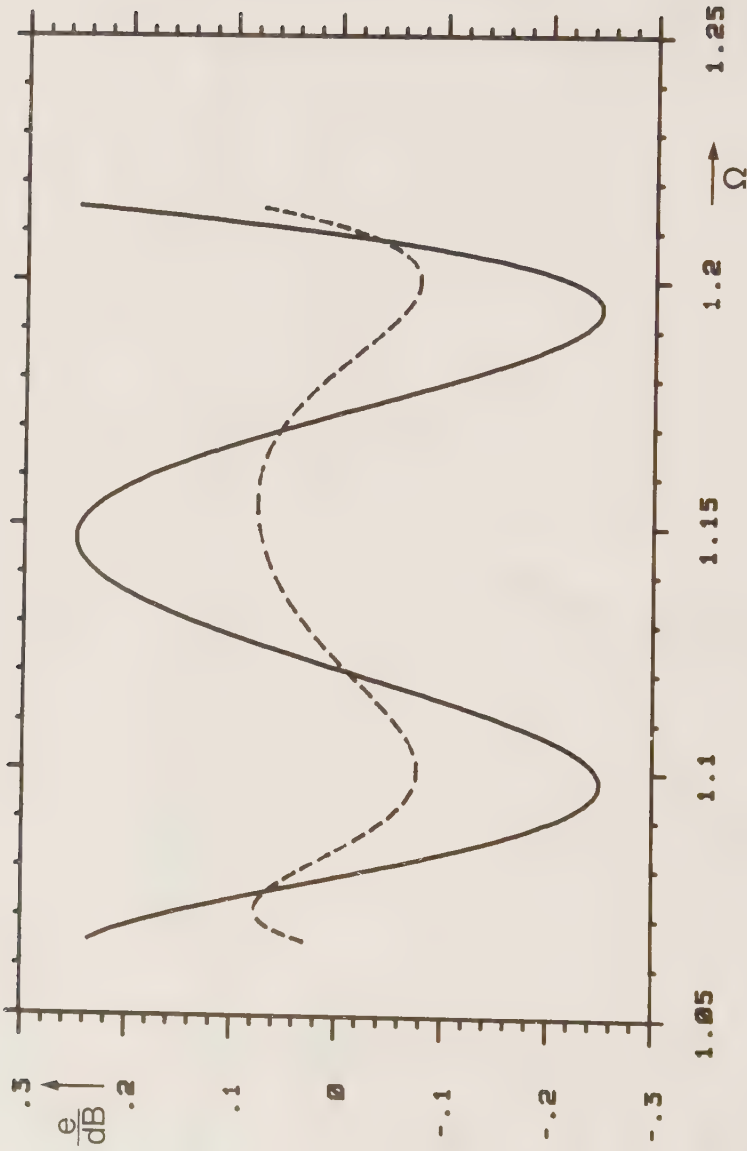


Bild III, 10: Dämpfungs-Fehlerverlauf von 1sukz. und 1Bgleich. — 1sukz. ----- 1Bgleich.

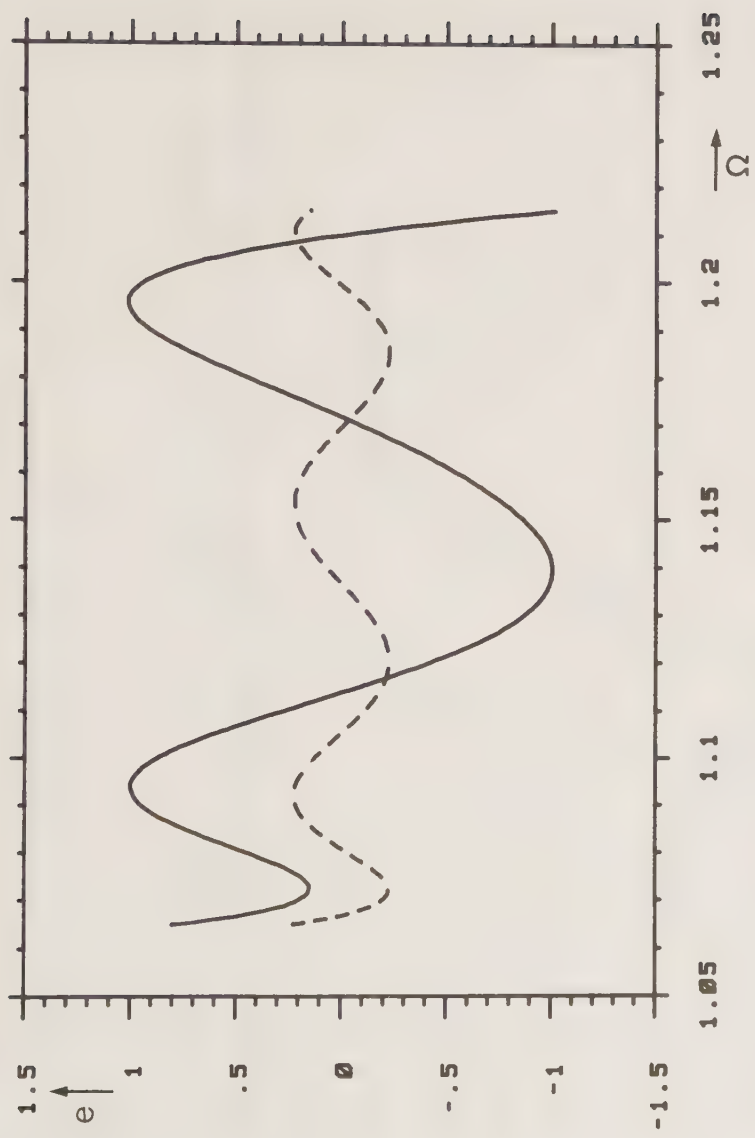


Bild III. 11: Gruppenlaufzeit-Fehlverlauf von 1sukz. und 1Bgleich. — 1sukz. ---- 1Bgleich.

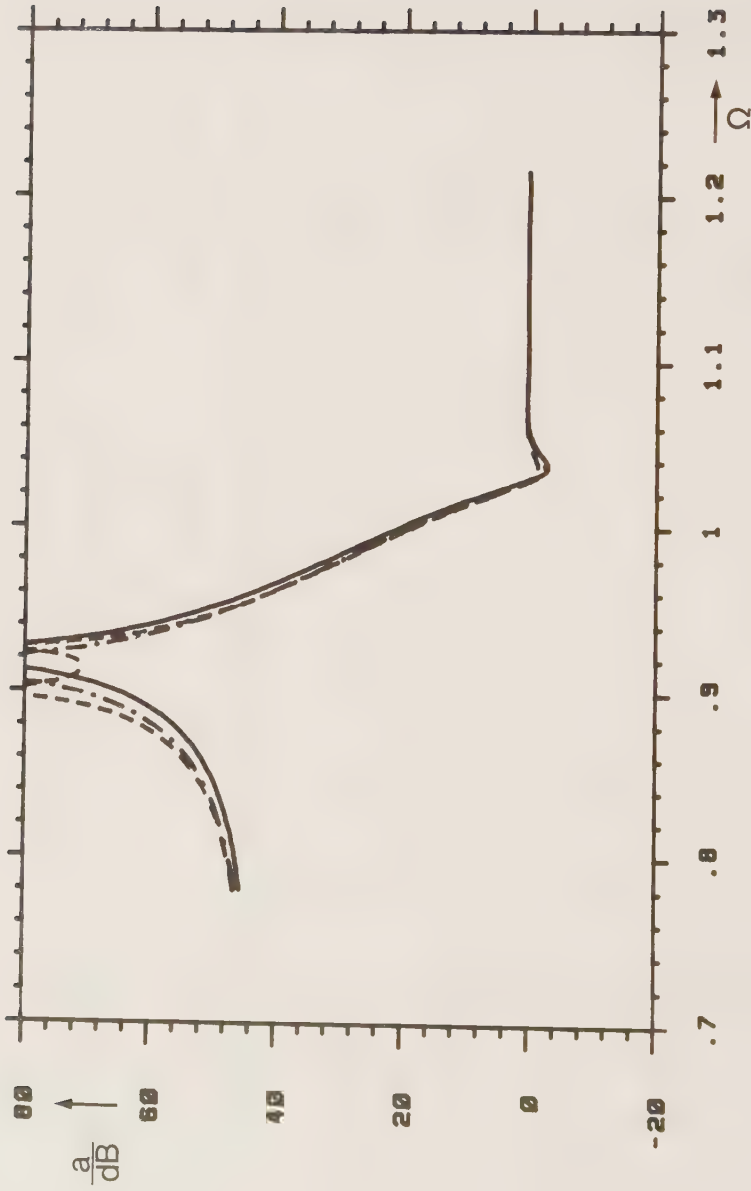


Bild III, 12: Dämpfungsverlauf von 1Agleich, 1Bgleich, und 1Cgleich.

— 1Agleich.    - - - - 1Bgleich.    - · - · - 1Cgleich.

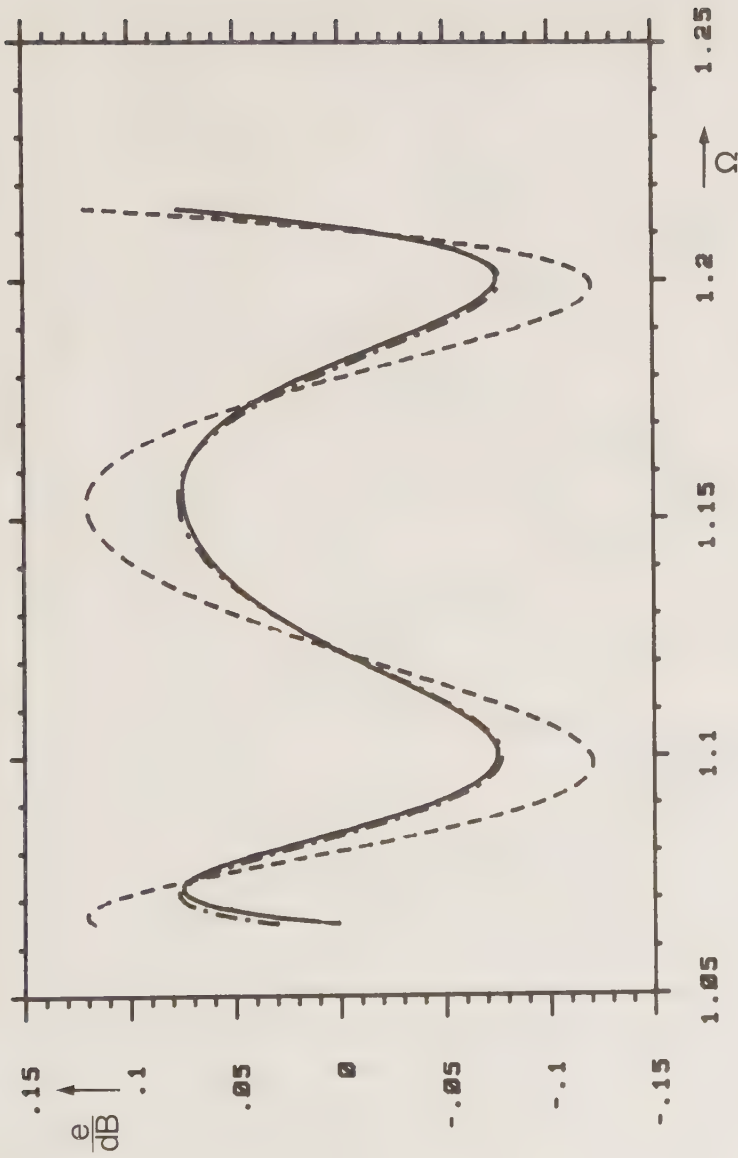


Bild III. 13: Dämpfungs-Fehlverlauf von 1Agleich., 1Bggleich. und 1Cgleich.  
 — 1Agleich.    - - - - 1Bggleich.    - · - · - 1Cgleich.

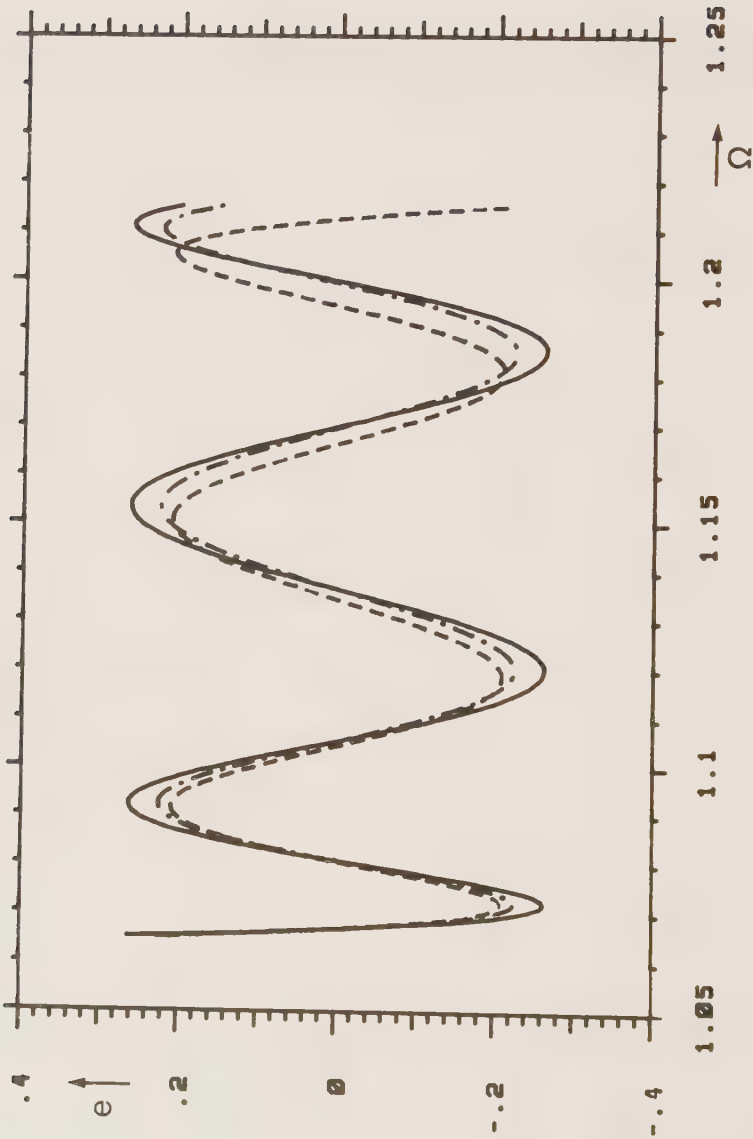


Bild III. 14: Gruppenlaufzeit-Fehlerverlauf von 1Agleich., 1Bgleich. und 1Cgleich.  
 — 1Agleich.    - - - - 1Cgleich.    - . - . 1Bgleich.

Vergleicht man nun an diesem Beispiel sukzessive und gleichzeitige Approximation, so ergeben sich folgende Fehlerverhältnisse, wobei 1sukz. und 1Bgleich. einander gegenübergestellt sind:

$$\text{Dämpfungsfehler: } \frac{e_{1\text{sukz.}}}{e_{1\text{Bgleich.}}} = 3,3$$

$$\text{Gruppenlaufzeitfehler: } \frac{e_{1\text{sukz.}}}{e_{1\text{Bgleich.}}} = 4,6$$

Schließlich wurde die Vorschrift noch mittels einer Nullstellen-Quadrupel-Struktur, wie sie im Kapitel 8 besprochen ist, approximiert. Dazu mußte der Grad von  $H(p)$  um Zwei erhöht werden. Ausgangslösung war wieder 1sukz., wobei natürlich die Quadrupelergänzung vor der Approximation vorgenommen wurde. Das Approximationsergebnis waren zwei verschiedene Quadrupellösungen, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit nur eine Lösung, 1QUgleich., aufgeführt ist.

Die Parameterwerte der Quadrupellösung 1QUgleich. sind:

Parameterwerte der Lösung 1QUgleich.

$$\begin{aligned} p_o &= 0,0 && \text{(festgehalten)} \\ p_o &= 0,0 \pm 0,9255376886 \text{ j} && \text{(Realteil festgehalten)} \\ p_o &= 0,0 \pm 0,9255376838 \text{ j} && ( \quad " \quad ) \\ p_o &= \pm 0,1028016412 \quad \pm 1,162399852 \text{ j} \\ p_\infty &= - 0,06739657238 \quad \pm 1,179496949 \text{ j} \\ p_\infty &= - 0,006876009236 \quad \pm 1,027034163 \text{ j} \\ p_\infty &= - 0,05679345062 \quad \pm 1,066687652 \text{ j} \\ p_\infty &= - 0,05075593512 \quad \pm 1,235410847 \text{ j} \\ p_x &= - 0,06880481539 \quad \pm 1,122402661 \text{ j} \\ t_0 &= 36,22820582 \end{aligned}$$

Dämpfungsverlauf, Dämpfungs-Fehlerverlauf sowie Gruppenlaufzeit-Fehlerverlauf sind in den Bildern III. 15, III. 16 und III. 17 wiedergegeben, wobei 1QUgleich. und 1Bgleich. miteinander verglichen sind.

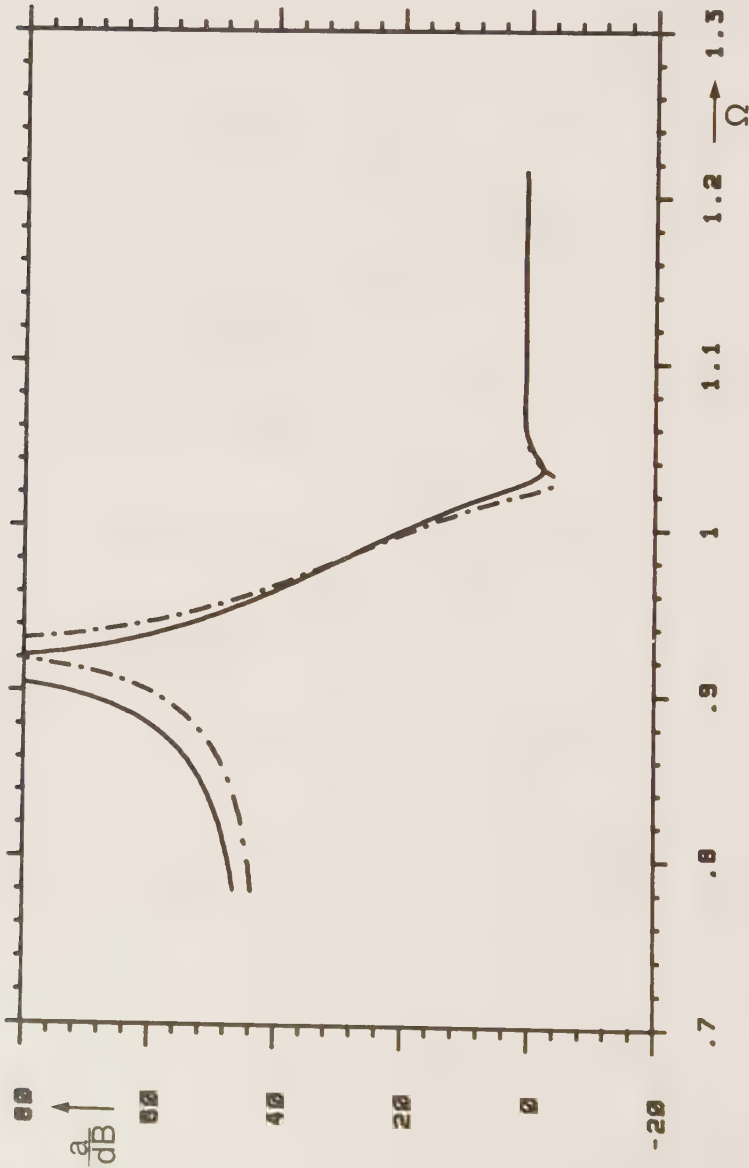


Bild III. 15: Dämpfungsverlauf von 1QUgleich. und 1Bgleich.  
— 1Bgleich. — · — · — 1QUgleich.

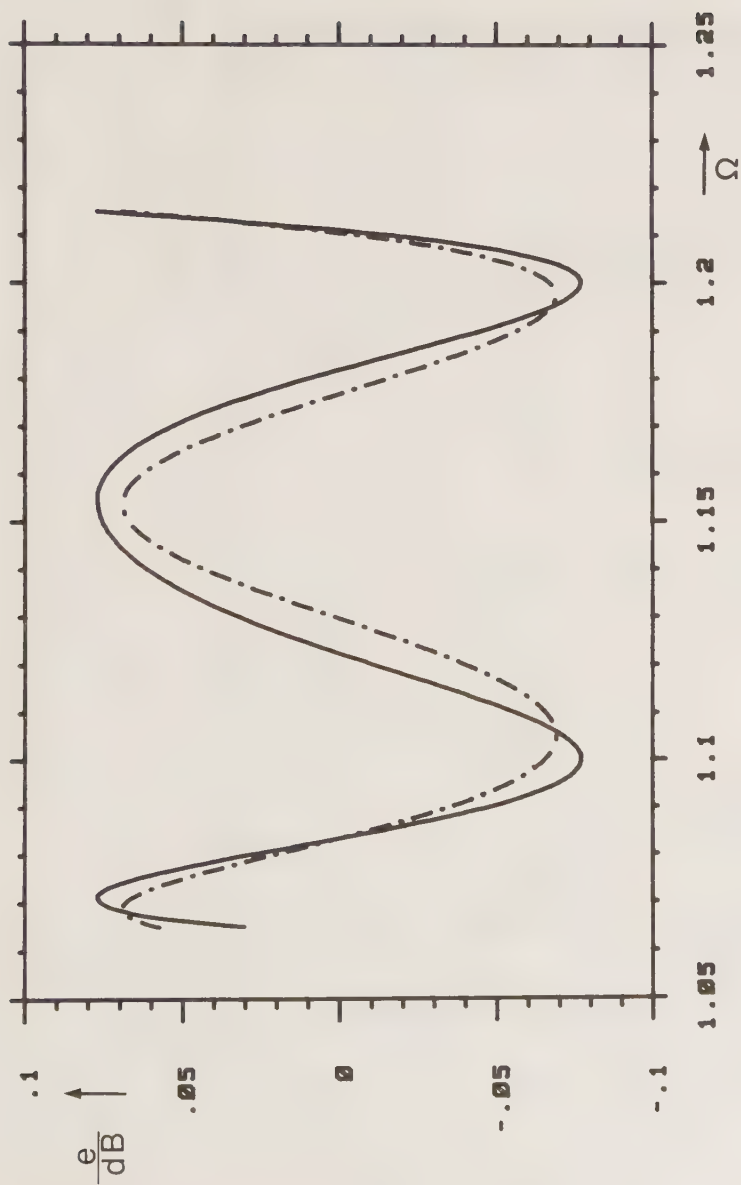


Bild III. 16: Dämpfungs-Fehlverlauf von 1Q Gleich, und 1B Gleich.  
 — 1B Gleich, - - - 1Q Gleich.

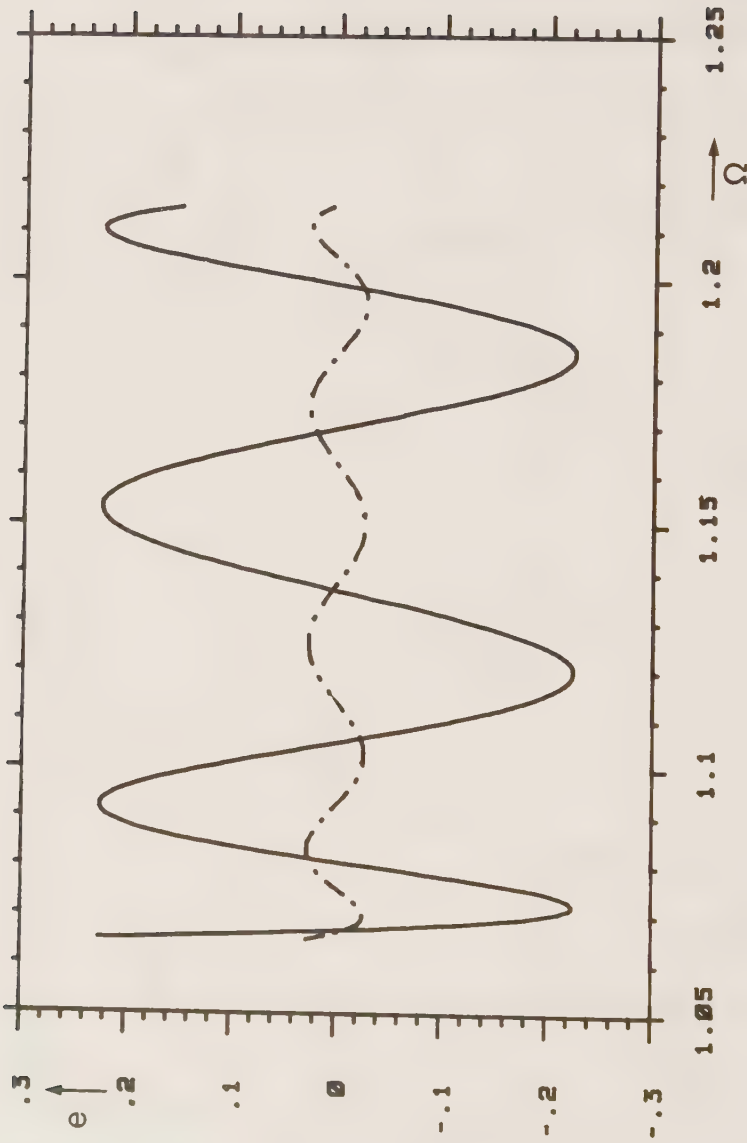


Bild III. 17: Gruppenlaufzeit-Fehlerverlauf von 1QUGleich, und 1Bgleich.  
— 1Bgleich, - - - 1QUGleich.

## Beispiel 2

|             |                                |                                                   |
|-------------|--------------------------------|---------------------------------------------------|
| Vorschrift: | $0,78 \leq \Omega \leq 0,96$   | $a_N(\Omega) \geq 40 \text{ dB}$                  |
|             | $1,065 \leq \Omega \leq 1,215$ | $a_S(\Omega) = 0,5 \text{ dB} \pm 0,5 \text{ dB}$ |
|             | $1,065 \leq \Omega \leq 1,215$ | $T_G(\Omega) = [80 \Omega - 37,2] \pm 1,5$        |

Die Konstante war  $K = 0,02682776$ .

Bild III. 18 gibt die Dämpfungsvorschrift wieder, Bild III. 19 die vorgeschriebene Gruppenlaufzeit. Als Bezugsfrequenz wurde  $f_B = 1 \text{ kHz}$  gewählt. In der nächsten Tabelle ist das Ergebnis der sukzessiven Approximation angegeben, die als Startlösung diente und 2sukz. genannt wird:

### Parameterwerte der Startlösung 2sukz.

|                |                                           |                         |
|----------------|-------------------------------------------|-------------------------|
| $p_o =$        | $0,0$                                     | (festgehalten)          |
| $p_o =$        | $0,0 \pm 0,9508110000 \text{ j}$          | (Realteil festgehalten) |
| $p_o =$        | $0,0 \pm 0,8318470000 \text{ j}$          | ( " " )                 |
| $p_o =$        | $0,07509539920 \pm 1,152184200 \text{ j}$ |                         |
| $p_o =$        | $0,07107700940 \pm 1,273743600 \text{ j}$ |                         |
| $p_\infty = -$ | $0,07509539920 \pm 1,152184200 \text{ j}$ |                         |
| $p_\infty = -$ | $0,07107700940 \pm 1,273743600 \text{ j}$ |                         |
| $p_\infty = -$ | $0,01414230000 \pm 1,032714000 \text{ j}$ |                         |
| $p_\infty = -$ | $0,05057180000 \pm 1,213000000 \text{ j}$ |                         |
| $p_\infty = -$ | $0,05090850000 \pm 1,087743000 \text{ j}$ |                         |
| $t_0 = -$      | $4,24562145$                              |                         |

Die gleichzeitige Approximation erfolgte einmal mit dem Grad  $n = 10$  der Startlösung. Die Lösung wird deshalb 2n10gleich, genannt (2. Beispiel,  $n = 10$ ). Zum anderen wurde versucht, die Vorschrift auch mit dem Grad  $n = 8$  zu erfüllen, das Ergebnis heißt 2n8gleich. .

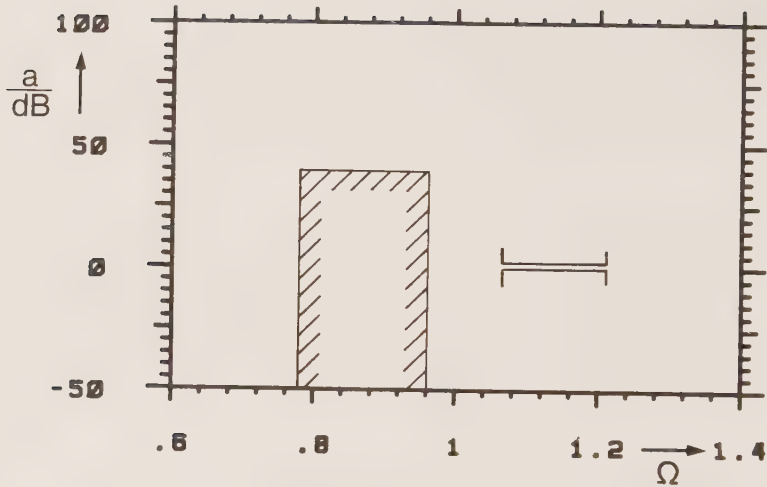


Bild III. 18: Dämpfungsvorschrift für Beispiel 2

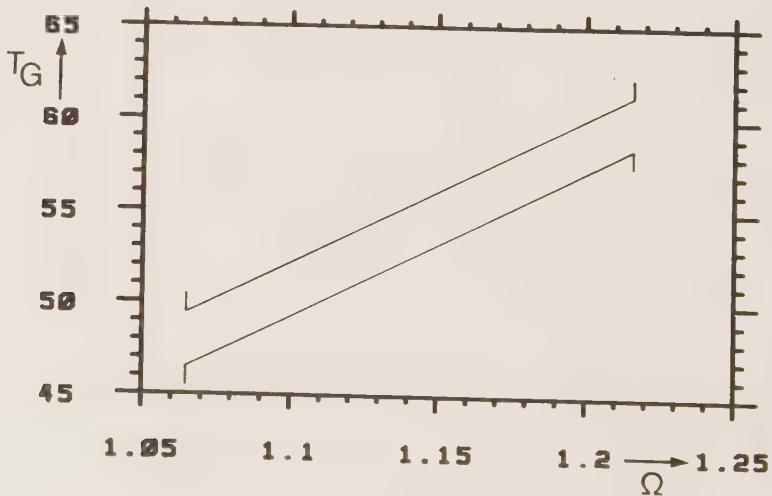


Bild III. 19: Gruppenlaufzeitvorschrift für Beispiel 2

Die Parameterwerte der beiden Lösungen sind in der nächsten Tabelle enthalten:

Parameterwerte der Lösung 2n8gleich.

|              |                                  |                         |
|--------------|----------------------------------|-------------------------|
| $p_o =$      | 0,0                              | (festgehalten)          |
| $p_o =$      | 0,0 ± 0,9233896468 j             | (Realteil festgehalten) |
| $p_o =$      | 0,0 ± 0,9233891448 j             | ( " " )                 |
| $p_o =$      | 0,07647324022 ± 1,176226822 j    |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,06486396447 ± 1,153072969 j  |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,007232133884 ± 1,034504288 j |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,03977672770 ± 1,221508014 j  |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,05409417640 ± 1,086227600 j  |                         |
| $t_0 =$      | - 13,71711899                    |                         |

Parameterwerte der Lösung 2n10gleich.

|              |                                  |                         |
|--------------|----------------------------------|-------------------------|
| $p_o =$      | 0,0                              | (festgehalten)          |
| $p_o =$      | 0,0 ± 0,9508078298 j             | (Realteil festgehalten) |
| $p_o =$      | 0,0 ± 0,7854168418 j             | ( " " )                 |
| $p_o =$      | 0,09861348491 ± 1,123728491 j    |                         |
| $p_o =$      | 0,07739160132 ± 1,213070756 j    |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,009284724342 ± 1,020327337 j |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,07066108604 ± 1,183331152 j  |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,06111107266 ± 1,064918316 j  |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,07882448487 ± 1,125442005 j  |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,04284222573 ± 1,238779064 j  |                         |
| $t_0 =$      | - 3,79996705                     |                         |

Das Ergebnis der sukzessiven und die Ergebnisse der gleichzeitigen Approximation werden nun miteinander verglichen. Bild III. 20 zeigt den Dämpfungsverlauf, Bild III. 21 den Gruppenlaufzeitverlauf. Der Dämpfungs - Fehlerverlauf ist im Bild III. 22

dargestellt. Da die Lösung 2n10gleich. im Vergleich mit 2sukz. und 2n8gleich. ganz erheblich besser ist, enthält Bild III. 23 den Fehlerverlauf vergrößert, damit ersichtlich wird, daß der Fehlerverlauf absolut gleichmäßig ist.

Der Gruppenlaufzeit-Fehlerverlauf der drei Ergebnisse ist aus Bild III. 24 ersichtlich. Da der Fehler der Lösung 2n10gleich. , verglichen mit den anderen Fehlern, wiederum viel kleiner ist, zeigt ihn Bild III. 25 vergrößert.

Schließlich werden auch bei diesem Beispiel die Fehler von sukzessiver und gleichzeitiger Approximation miteinander verglichen:

$$\begin{aligned} \text{Dämpfungsfehler:} \quad & \frac{e_{2\text{sukz.}}}{e_{2\text{n8gleich.}}} = 1,3 \\ \text{Gruppenlaufzeitfehler:} \quad & \frac{e_{2\text{sukz.}}}{e_{2\text{n8gleich.}}} = 1,5 \end{aligned}$$

Obwohl die Lösung 2n8gleich. um den Grad 2 niedriger ist, ist sie dennoch besser als die Lösung der sukzessiven Approximation und erfüllt die Vorschrift. Vergleicht man die Ergebnisse gleichen Grades miteinander, also 2sukz. und 2n10gleich., so zeigt sich die Überlegenheit der gleichzeitigen Approximation besonders deutlich:

$$\begin{aligned} \text{Dämpfungsfehler:} \quad & \frac{e_{2\text{sukz.}}}{e_{2\text{n10gleich.}}} = 38,2 \\ \text{Gruppenlaufzeitfehler:} \quad & \frac{e_{2\text{sukz.}}}{e_{2\text{n10gleich.}}} = 24,5 \end{aligned}$$

Am Ergebnis fällt auf, daß bei der Lösung 2n8gleich. die beiden Nullstellen auf der imaginären Achse fast zusammengefallen sind, bei der erheblich besseren Lösung 2n10gleich. jedoch getrennt auftreten.

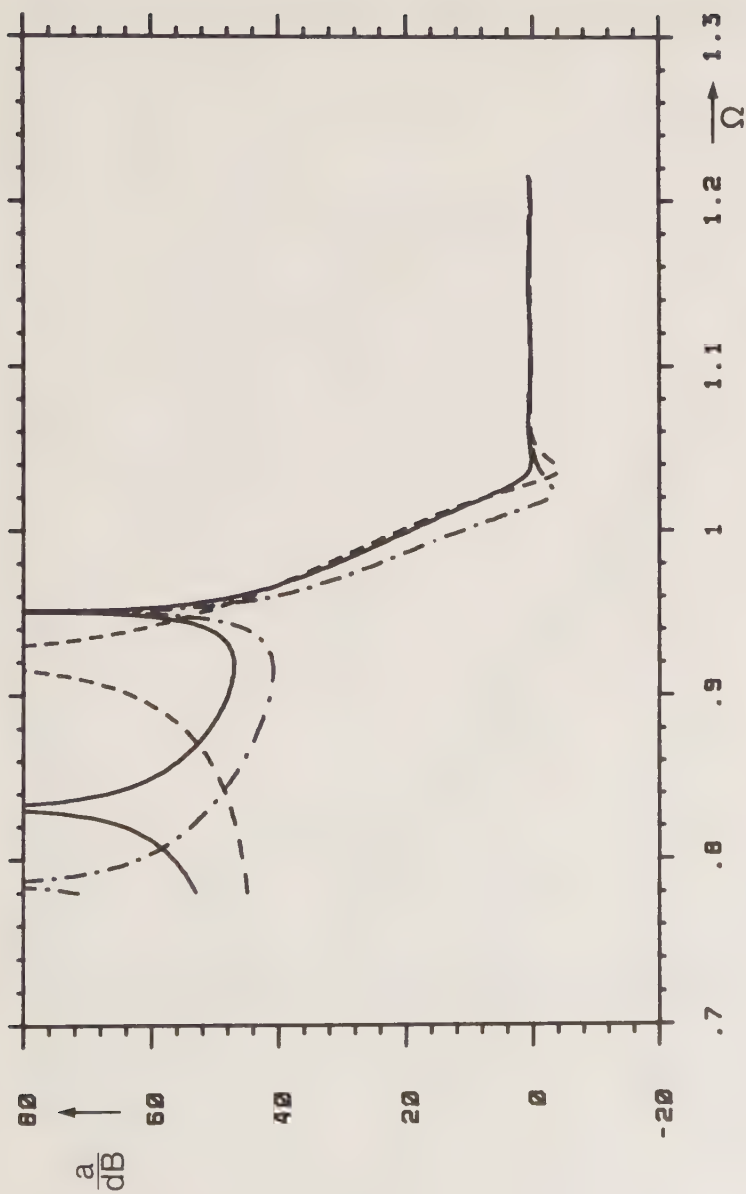


Bild III. 20: Dämpfungsverlauf von 2sukz., 2n8gleich. und 2n10gleich.  
 — 2sukz.    ---- 2n8gleich.    - · - · - 2n10gleich.

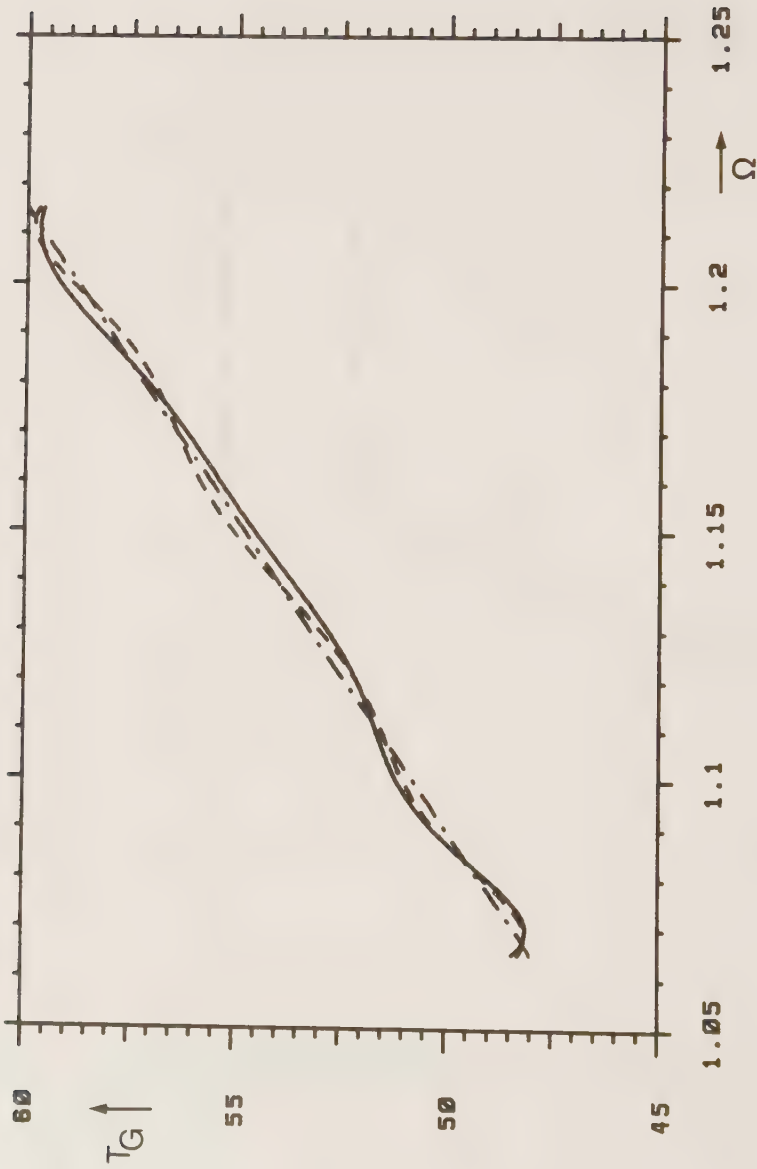


Bild III. 21: Gruppenlaufzeitverlauf von 2sukz., 2n8gleich. und 2n10gleich.  
—— 2sukz.    - - - - 2n8gleich.    - . - . 2n10gleich.

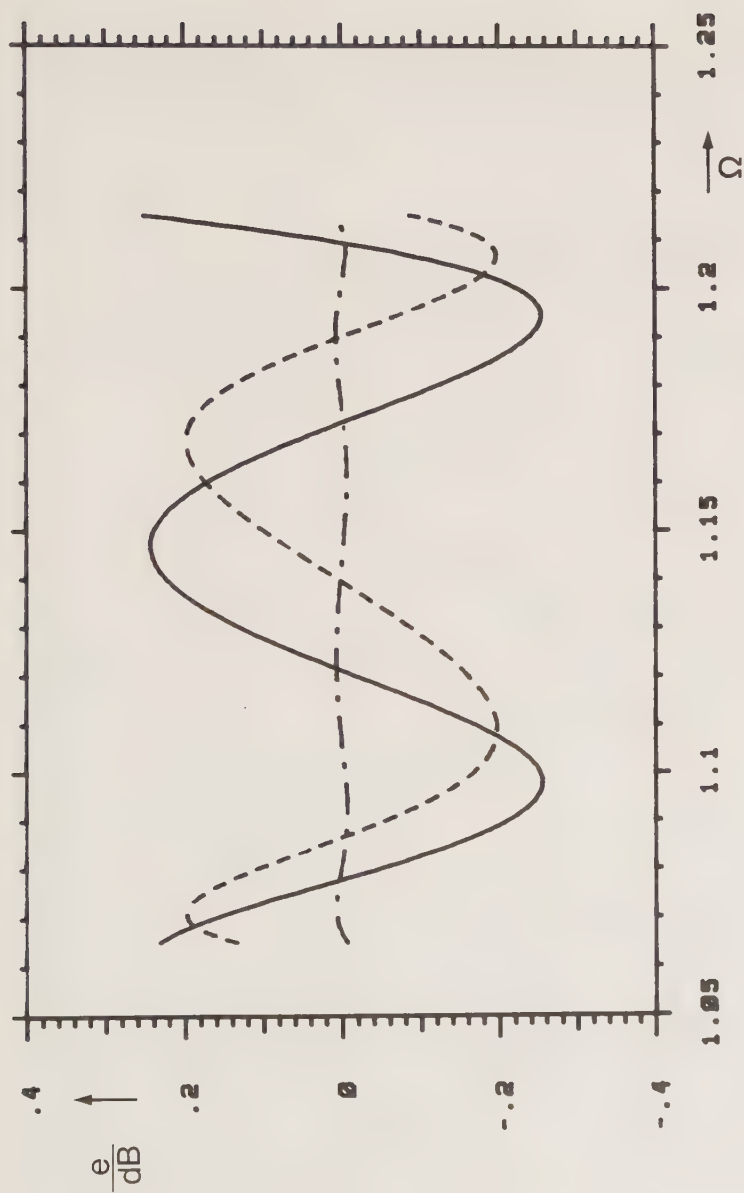


Bild III. 22: Dämpfungs-Fehlerverlauf von 2sukz., 2n8gleich und 2n10gleich.  
 — 2sukz., - - - - 2n8gleich, - · - · - 2n10gleich.

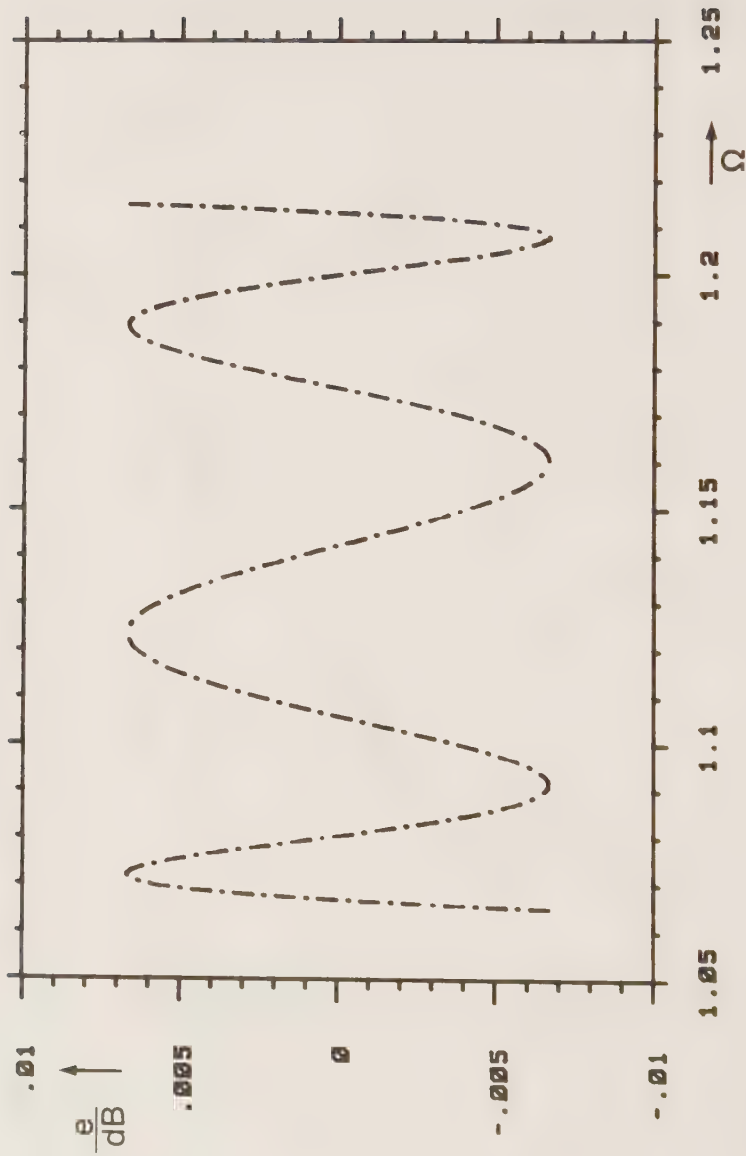


Bild III. 23: Dämpfungs-Fehlerverlauf von 2n10gleich.

— — — — — 2n10gleich.

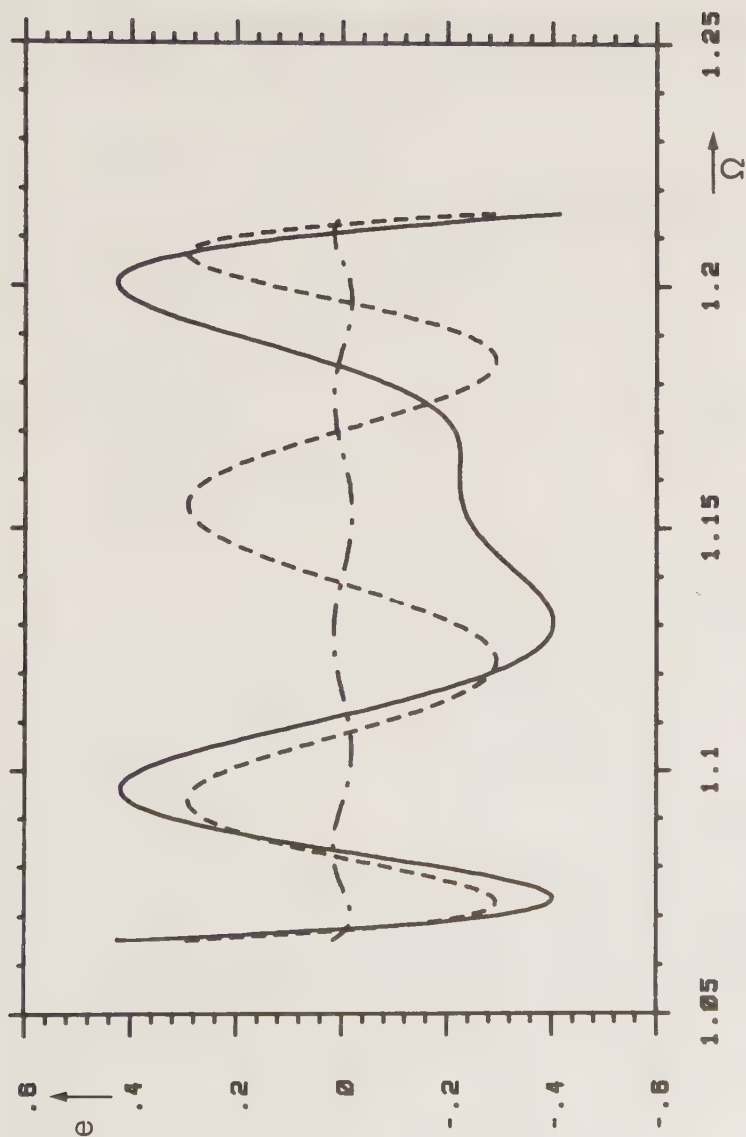


Bild III. 24: Gruppenlaufzeit-Fehlverlauf von 2sukz., 2n8gleich und 2n10gleich.  
 — 2sukz., ---- 2n8gleich, - · - · - 2n10gleich.

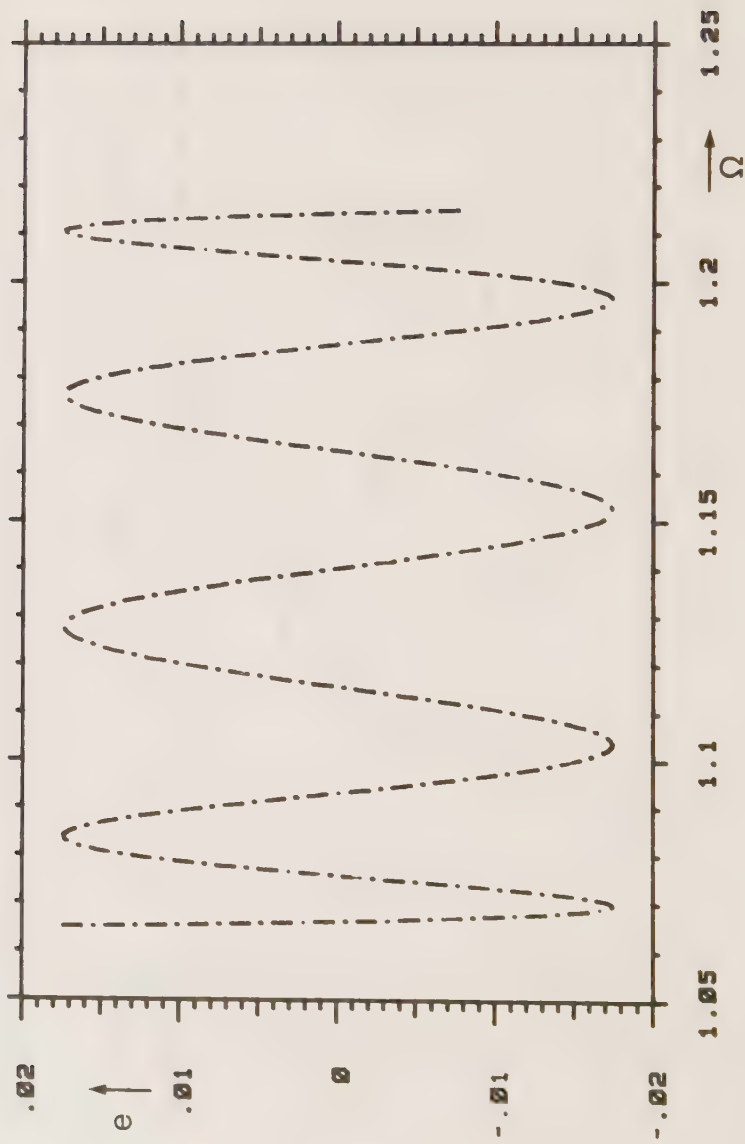


Bild III. 25: Gruppenlaufzeit-Fehlverlauf von 2n10gleich.

— — — — 2n10gleich.

### Beispiel 3

$$\begin{array}{ll} \text{Vorschrift: } 0,78 \leq \Omega \leq 0,96 & a_N(\Omega) \geq 40 \text{ dB} \\ 1,065 \leq \Omega \leq 1,215 & a_S(\Omega) = 0,5 \text{ dB} \pm 0,5 \text{ dB} \\ 1,065 \leq \Omega \leq 1,215 & T_G(\Omega) = [-80 \text{ } \Omega + 145,2] \pm 1,5 \end{array}$$

Die vorgeschriebene Konstante war  $K = 0,02682776$ .

Bild III. 26 enthält die Dämpfungsvorschrift, Bild III. 27 die Gruppenlaufzeitvorschrift. Die Bezugshfrequenz war  $f_B = 1 \text{ kHz}$ . Der folgenden Tabelle kann das Ergebnis der sukzessiven Approximation, das 3sukz. heißt, entnommen werden:

#### Parameterwerte der Startlösung 3sukz.

$$\begin{array}{ll} p_0 = 0,0 & (\text{festgehalten}) \\ p_0 = 0,0 \pm 0,8318470000 \text{ j} & (\text{Realteil festgehalten}) \\ p_0 = 0,0 \pm 0,9508110000 \text{ j} & ( \quad " \quad " \quad ) \\ p_0 = 0,1316586430 \pm 1,013476160 \text{ j} & \\ p_0 = 0,08487479800 \pm 1,150124090 \text{ j} & \\ p_\infty = - 0,1316586430 \pm 1,013476160 \text{ j} & \\ p_\infty = - 0,08487479800 \pm 1,150124090 \text{ j} & \\ p_\infty = - 0,01414230000 \pm 1,032714000 \text{ j} & \\ p_\infty = - 0,05057180000 \pm 1,213000000 \text{ j} & \\ p_\infty = - 0,05090850000 \pm 1,087743000 \text{ j} & \\ t_0 = - 4,85733871 & \end{array}$$

Die gleichzeitige Approximation wurde sowohl mit dem Grad 10 — dem Grad des Ergebnisses der sukzessiven Approximation 3sukz. — als auch mit dem Grad 8 durchgeführt. Die Ergebnisse der gleichzeitigen Approximation tragen die Bezeichnungen 3n10gleich. bzw. 3n8gleich. .

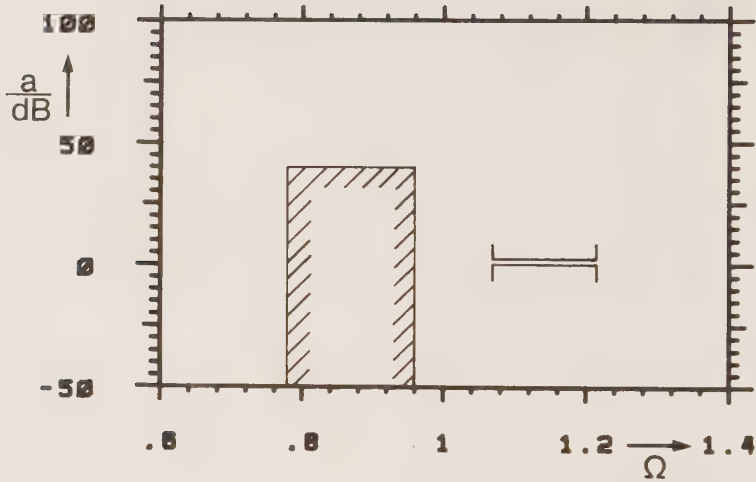


Bild III, 26: Dämpfungsvorschrift für Beispiel 3

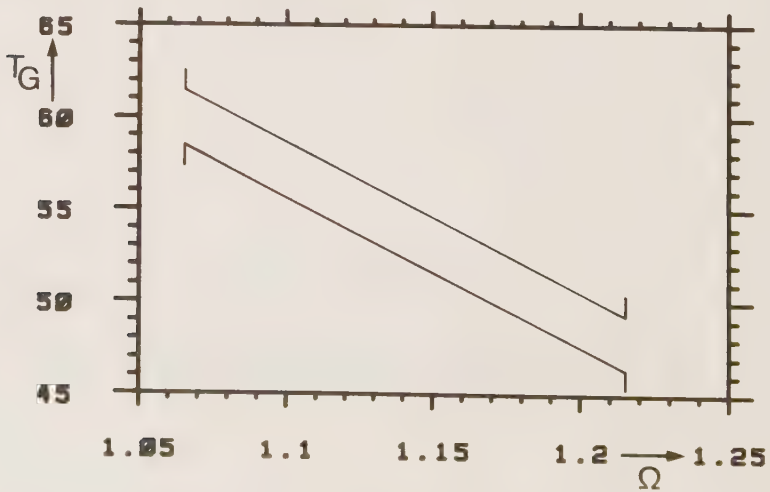


Bild III, 27: Gruppenlaufzeitvorschrift für Beispiel 3

Die nächsten Tabellen geben die Parameterwerte beider Lösungen an:

Parameterwerte der Lösung 3n8gleich.

|              |                                 |                         |
|--------------|---------------------------------|-------------------------|
| $p_o =$      | 0,0                             | (festgehalten)          |
| $p_o =$      | 0,0 ± 0,6795893914 j            | (Realteil festgehalten) |
| $p_o =$      | 0,0 ± 0,9491311301 j            | ( " " )                 |
| $p_o =$      | 0,1304747875 ± 1,128143154 j    |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,08307042156 ± 1,159800082 j |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,01293100079 ± 1,028404214 j |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,06804754299 ± 1,270922030 j |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,05931996114 ± 1,078664608 j |                         |
| $t_0 =$      | - 22,61306742                   |                         |

Parameterwerte der Lösung 3n10gleich.

|              |                                 |                         |
|--------------|---------------------------------|-------------------------|
| $p_o =$      | 0,0                             | (festgehalten)          |
| $p_o =$      | 0,0 ± 0,9500258373 j            | (Realteil festgehalten) |
| $p_o =$      | 0,0 ± 0,7351362172 j            | ( " " )                 |
| $p_o =$      | 0,1007047166 ± 1,088688554 j    |                         |
| $p_o =$      | 0,1120476200 ± 1,192909425 j    |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,01445272041 ± 1,022846151 j |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,06151364072 ± 1,261264744 j |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,05485502493 ± 1,062500726 j |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,07726149407 ± 1,119115500 j |                         |
| $p_\infty =$ | - 0,08572145765 ± 1,185396561 j |                         |
| $t_0 =$      | - 7,10016487                    |                         |

Zunächst wird ein Vergleich der Ergebnisse 3sukz., 3n8gleich. und 3n10gleich. durchgeführt. Bild III. 28 zeigt den Dämpfungsverlauf, Bild III. 29 den Gruppenlaufzeitverlauf. Der Dämpfungs-Fehlerverlauf ist aus Bild III. 30, der Gruppenlaufzeit-Fehlerverlauf aus Bild III. 31 ersichtlich.

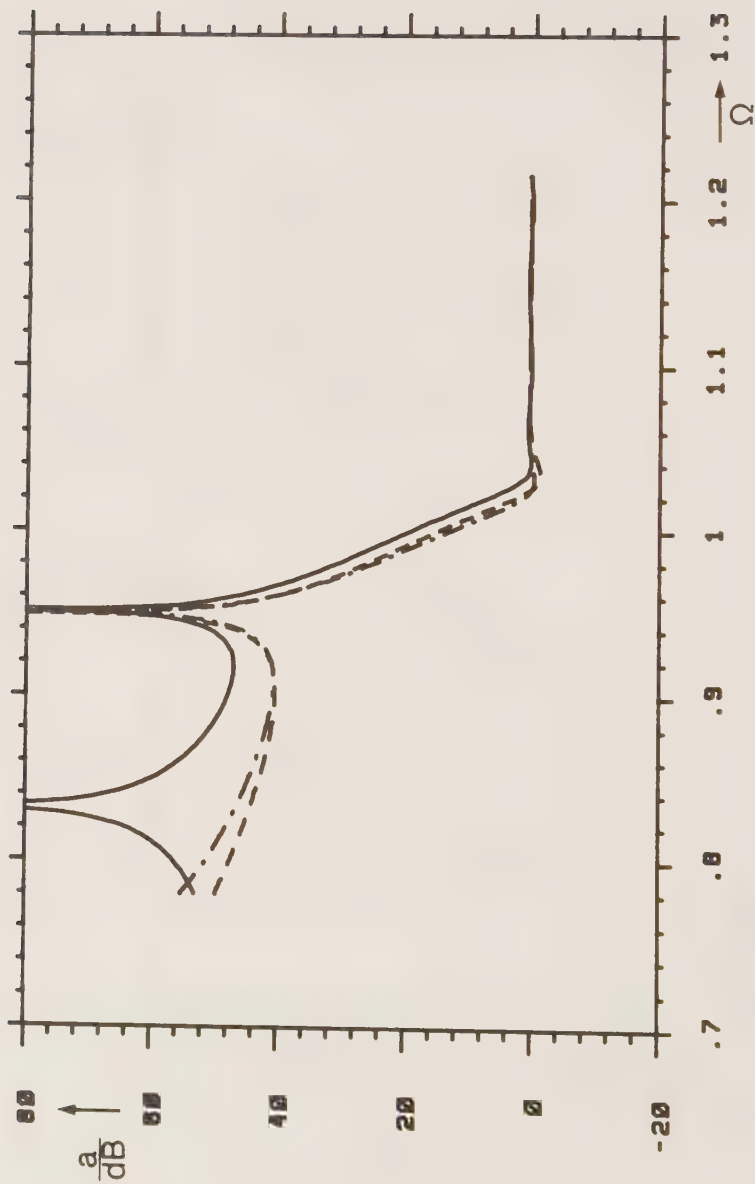


Bild III. 28: Dämpfungsverlauf von 3sukz., 3n8gleich. und 3n10gleich.  
 — 3sukz., ---- 3n8gleich, - · - · - 3n10gleich.

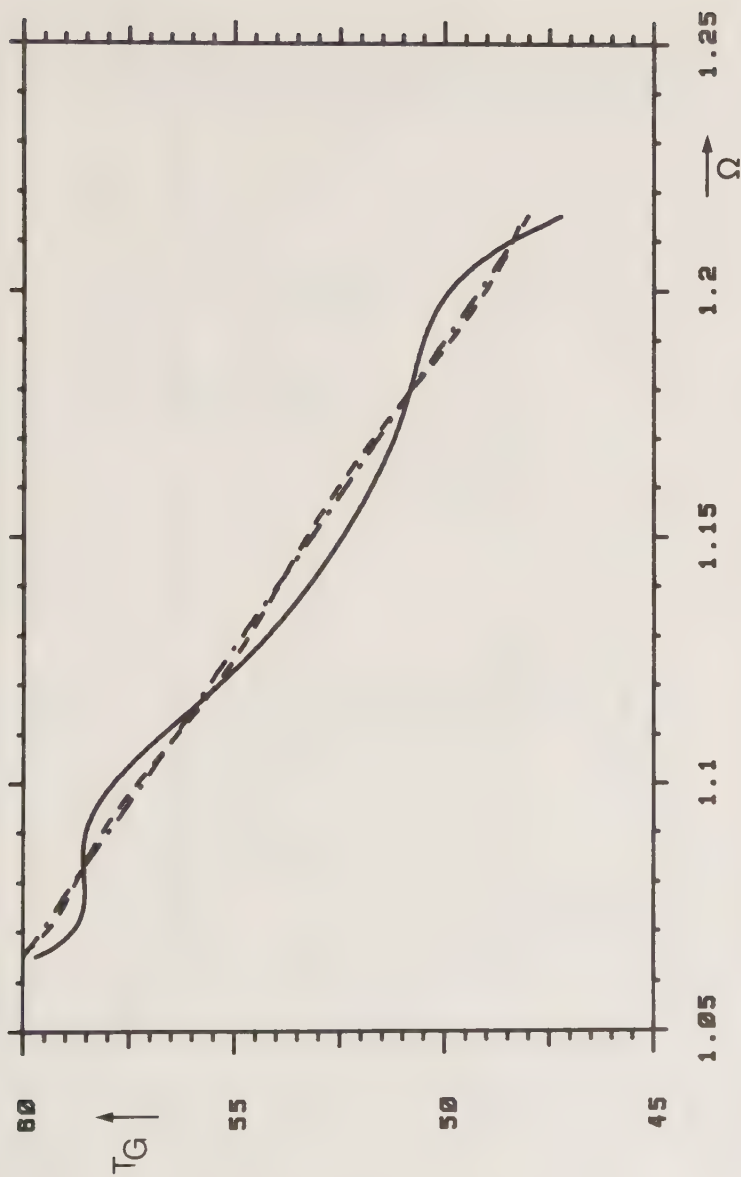


Bild III. 29: Gruppenlaufzeitverlauf von 3sukz., 3n8gleich. und 3n10 gleich.  
 — 3sukz.    ---- 3n8gleich.    - . - . - 3n10gleich.

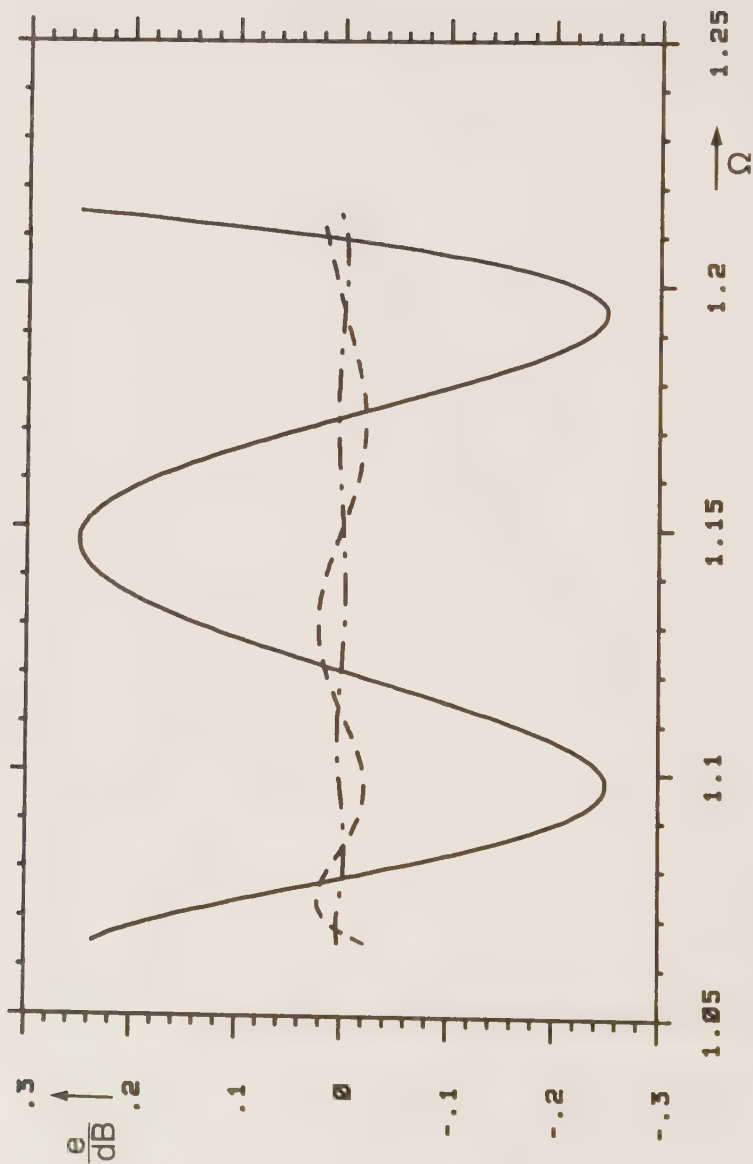


Bild III. 30: Dämpfungs-Fehlerverlauf von 3sukz., 3n8gleich. und 3n10gleich.  
 — 3sukz., ---- 3n8gleich., - . - . - 3n10gleich.

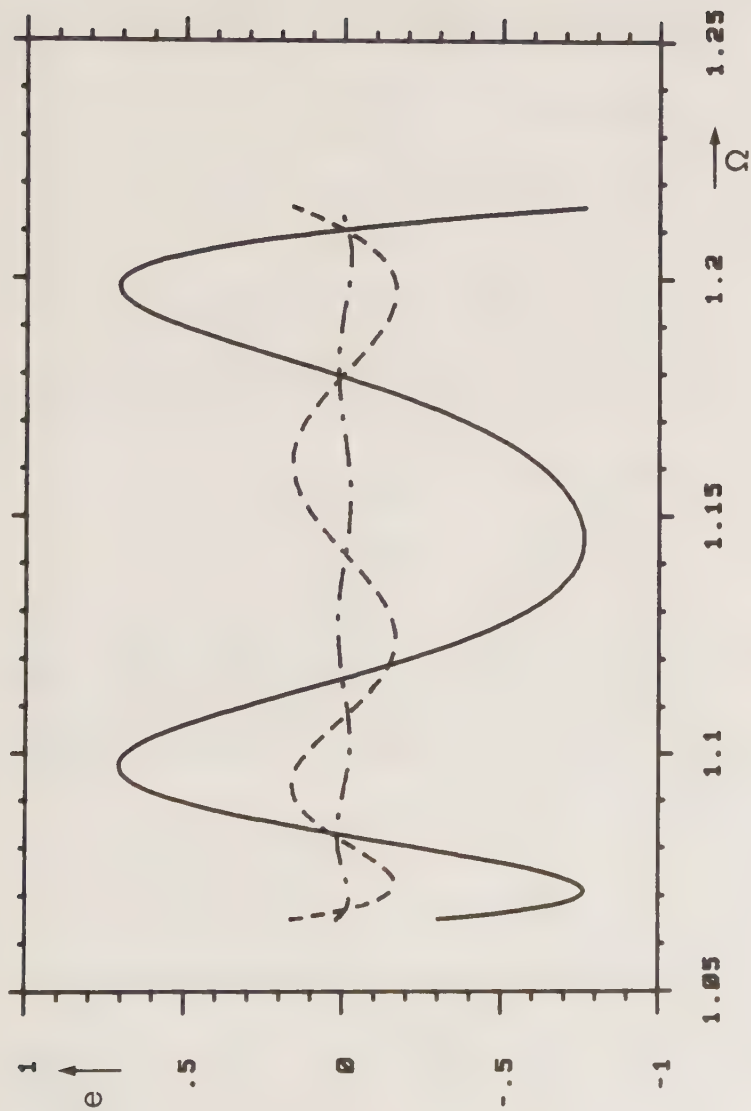


Bild III. 31: Gruppenlaufzeit-Fehlerverlauf von 3sukz., 3n8gleich und 3n10gleich.

— 3sukz., ---- 3n8gleich, -.-.- 3n10gleich.

Die Berechnung der Fehlerverhältnisse als Maßstab der Lösungsqualität von sukzessiver und gleichzeitiger Approximation ergab folgende Werte:

$$\text{Dämpfungsfehler: } \frac{e_{3\text{sukz.}}}{e_{3n8\text{gleich.}}} = 11,7$$

$$\text{Gruppenlaufzeitfehler: } \frac{e_{3\text{sukz.}}}{e_{3n8\text{gleich.}}} = 4,7$$

Trotz geringeren Grades ist das Ergebnis der gleichzeitigen Approximation wesentlich besser als das Ergebnis der sukzessiven Approximation. Vergleicht man die Lösungen mit gleichem Grad miteinander, dann wird der Unterschied noch viel krasser:

$$\text{Dämpfungsfehler: } \frac{e_{3\text{sukz.}}}{e_{3n10\text{gleich.}}} = 70,6$$

$$\text{Gruppenlaufzeitfehler: } \frac{e_{3\text{sukz.}}}{e_{3n10\text{gleich.}}} = 38,8$$

Um darzulegen, daß die Fehlerkurven der Ergebnisse der beiden gleichzeitigen Approximationen 3n8gleich. und 3n10gleich. völlig gleichmäßig sind, sind sie zusätzlich vergrößert dargestellt. Bild III. 32 bringt die Dämpfungsfehler, Bild III. 33 die Gruppenlaufzeitfehler.

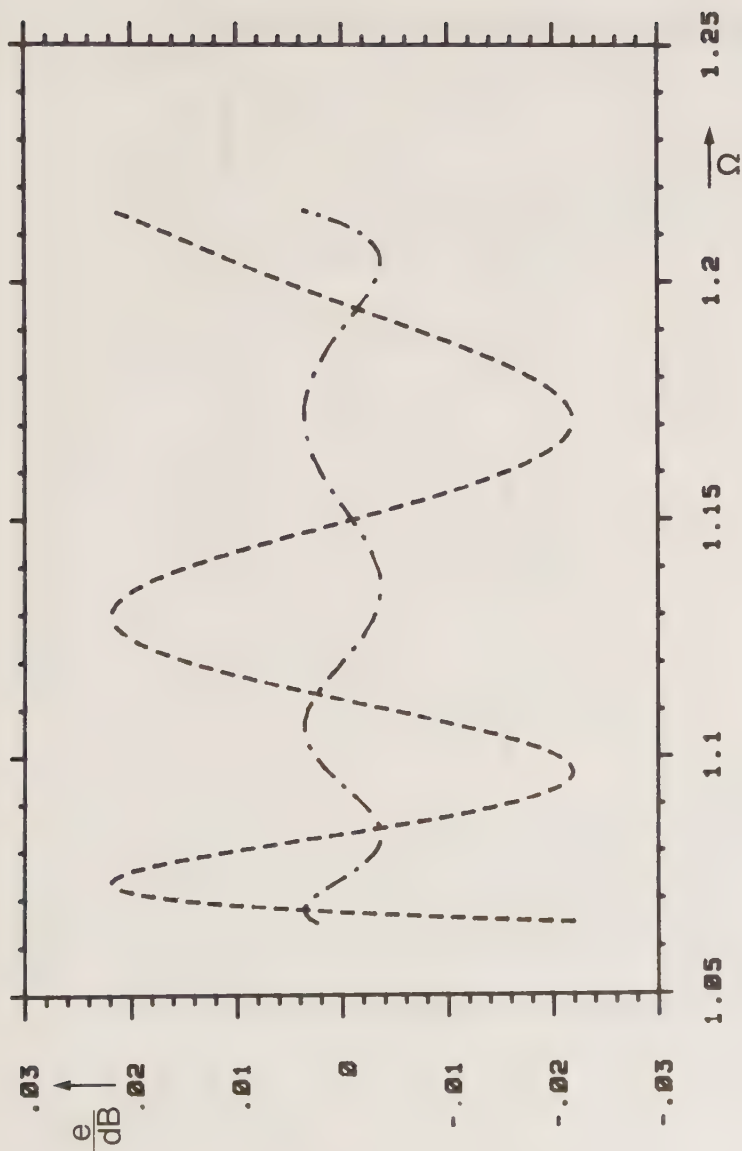


Bild III. 32: Dämpfungs-Fehlerverlauf von  $3n8gleich$ , und  $3n10gleich$ .

-----  $3n8gleich$ ,    - - - - -  $3n10gleich$ .

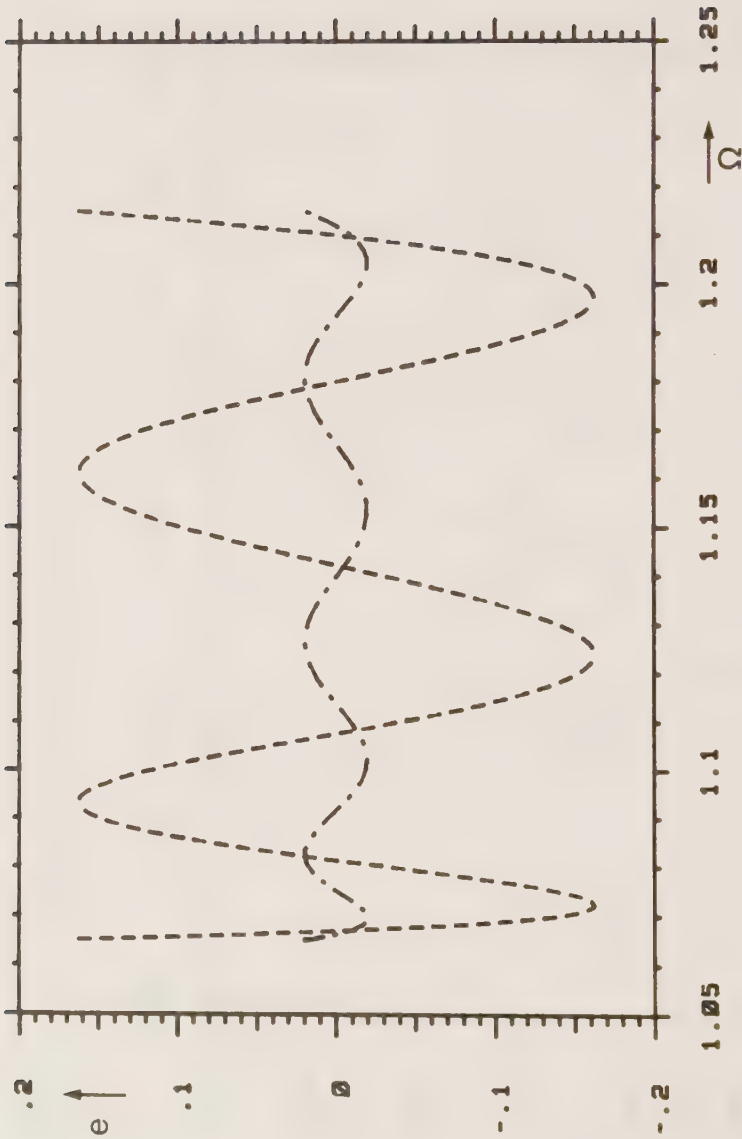


Bild III. 33: Gruppenlaufzeit-Fehlerverlauf von 3n8gleich, und 3n10gleich.

----- 3n8gleich,    - . - . - 3n10gleich.

Schließlich wurden in diesem Beispiel die Vorschriften noch mit einem vorgeschriebenen Mindestabstand  $\epsilon$  der Pole von der imaginären Achse der p-Ebene zu approximieren versucht. Das Ergebnis ist 3 $\epsilon$ gleich. genannt. Der Grad war gleich dem Grad von 3sukz., also  $n = 10$ . Die Forderung an den Mindestabstand  $\epsilon$  war  $\epsilon \geq 0,06$ , was eine erhebliche Beeinträchtigung bedeutet. Wie man der nächsten Tabelle entnehmen kann, wird der Mindestabstand von zwei Polen fast genau ausgenützt, das heißt, ihre Realteile sind betragsmäßig nur wenig größer als  $\epsilon$ .

Parameterwerte der Lösung 3 $\epsilon$ gleich.

|                |                                           |                         |
|----------------|-------------------------------------------|-------------------------|
| $p_0 =$        | 0,0                                       | (festgehalten)          |
| $p_0 =$        | $0,0 \pm 0,9528860524 \text{ j}$          | (Realteil festgehalten) |
| $p_0 =$        | $0,0 \pm 0,8712588299 \text{ j}$          | ( " " )                 |
| $p_0 =$        | $0,3899791316 \pm 1,211812586 \text{ j}$  |                         |
| $p_0 =$        | $0,08946225544 \pm 1,136370053 \text{ j}$ |                         |
| $p_\infty = -$ | $0,06000000003 \pm 1,018277134 \text{ j}$ |                         |
| $p_\infty = -$ | $0,07393537202 \pm 1,238987757 \text{ j}$ |                         |
| $p_\infty = -$ | $0,06000002264 \pm 1,018277082 \text{ j}$ |                         |
| $p_\infty = -$ | $0,08166654153 \pm 1,081918600 \text{ j}$ |                         |
| $p_\infty = -$ | $0,09914455918 \pm 1,171105153 \text{ j}$ |                         |
| $t_0 = -$      | 11,80695797                               |                         |

Die in den Bildern III. 34 und III. 35 dargestellten Fehlerkurven zeigen die einschneidende Wirkung des Mindestabstands auf die Lösung. Sie wird enorm verschlechtert, übertrifft aber immer noch das Ergebnis der sukzessiven Approximation, wie der folgende Vergleich zeigt:

$$\text{Dämpfungsfehler: } \frac{e_{3\text{sukz.}}}{e_{3\text{gleich.}}} = 1,3$$

$$\text{Gruppenlaufzeitfehler: } \frac{e_{3\text{sukz.}}}{e_{3\text{gleich.}}} = 2,4$$

Die Beeinflussung des Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitverlaufs ist aus den Bildern III. 36 und III. 37 zu erkennen, wobei zum Vergleich noch die gradgleiche Lösung ohne vorgeschriebenen Mindestabstand eingetragen ist.

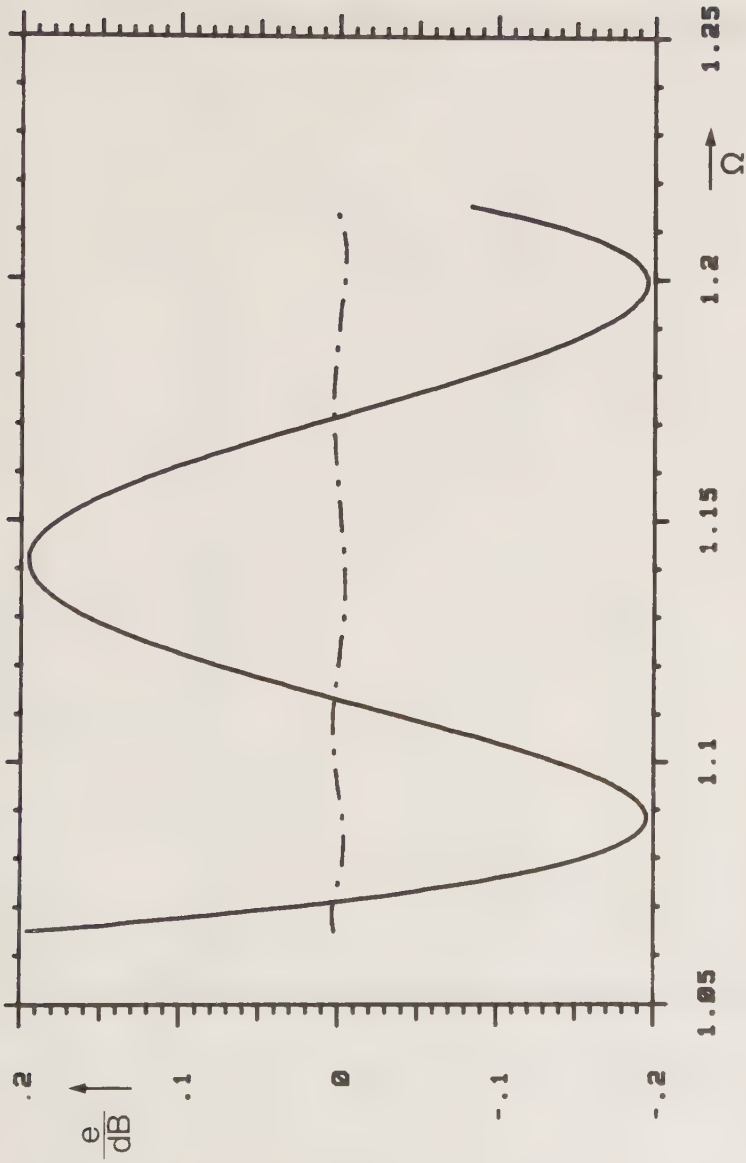


Bild III. 34: Dämpfungs-Fehlverlauf von 3 gleich. und 3n10 gleich.  
 — 3 gleich. — · — · — 3n10 gleich.

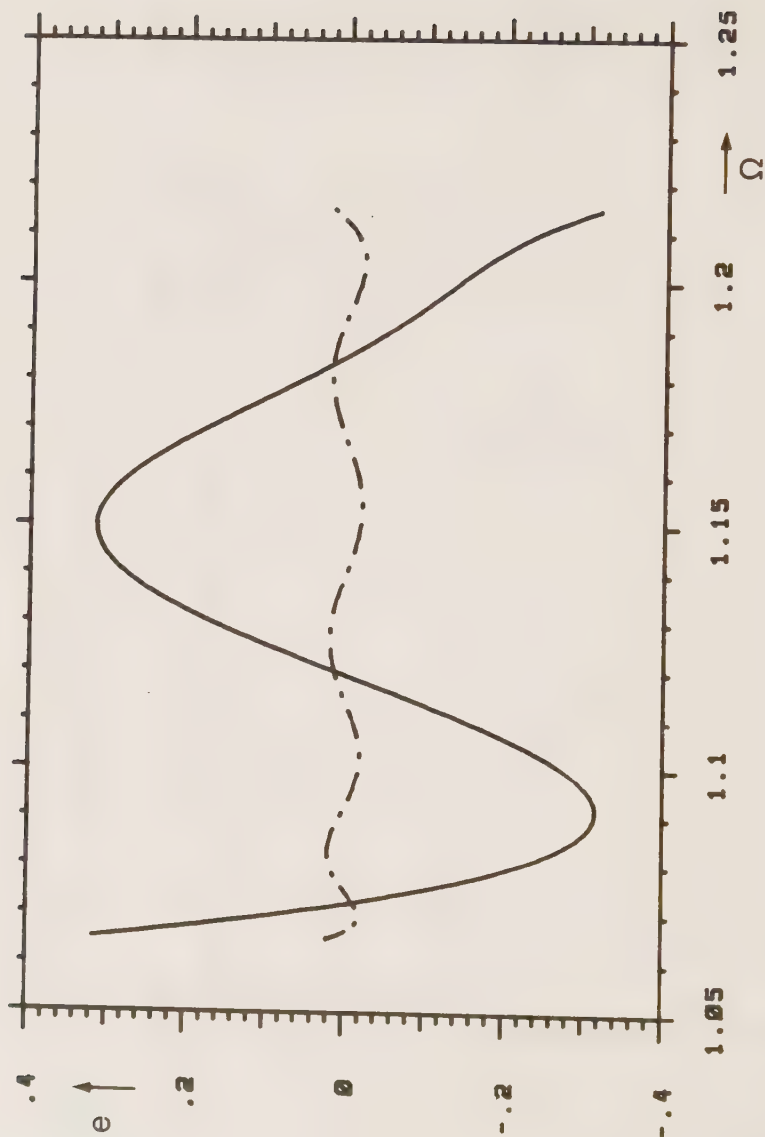


Bild III. 35: Gruppenlaufzeit-Fehlverlauf von  $3\epsilon$ gleich, und  $3n_{10}$ gleich.  
 —  $3\epsilon$ gleich, — · —  $3n_{10}$ gleich.

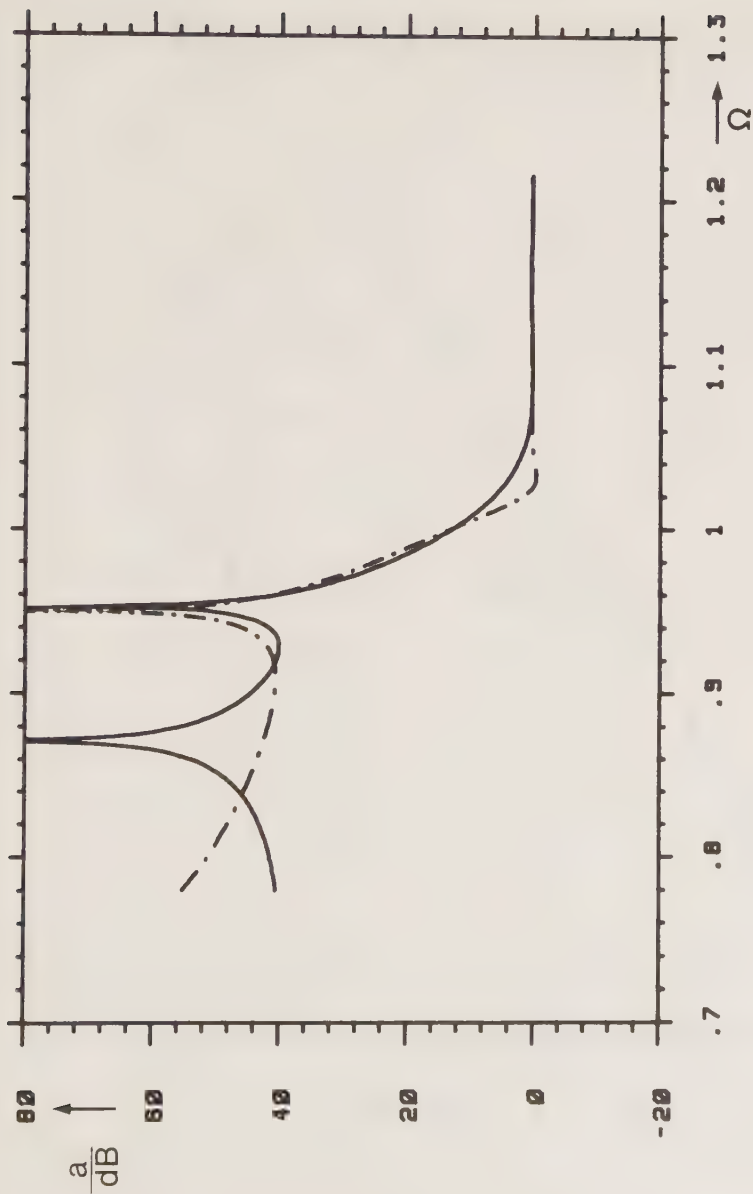


Bild III. 36: Dämpfungsverlauf von 3. Ordnung, und 3. Ordnung logarithmisch.  
 — 3. Ordnung,    - - - - 3. Ordnung logarithmisch.

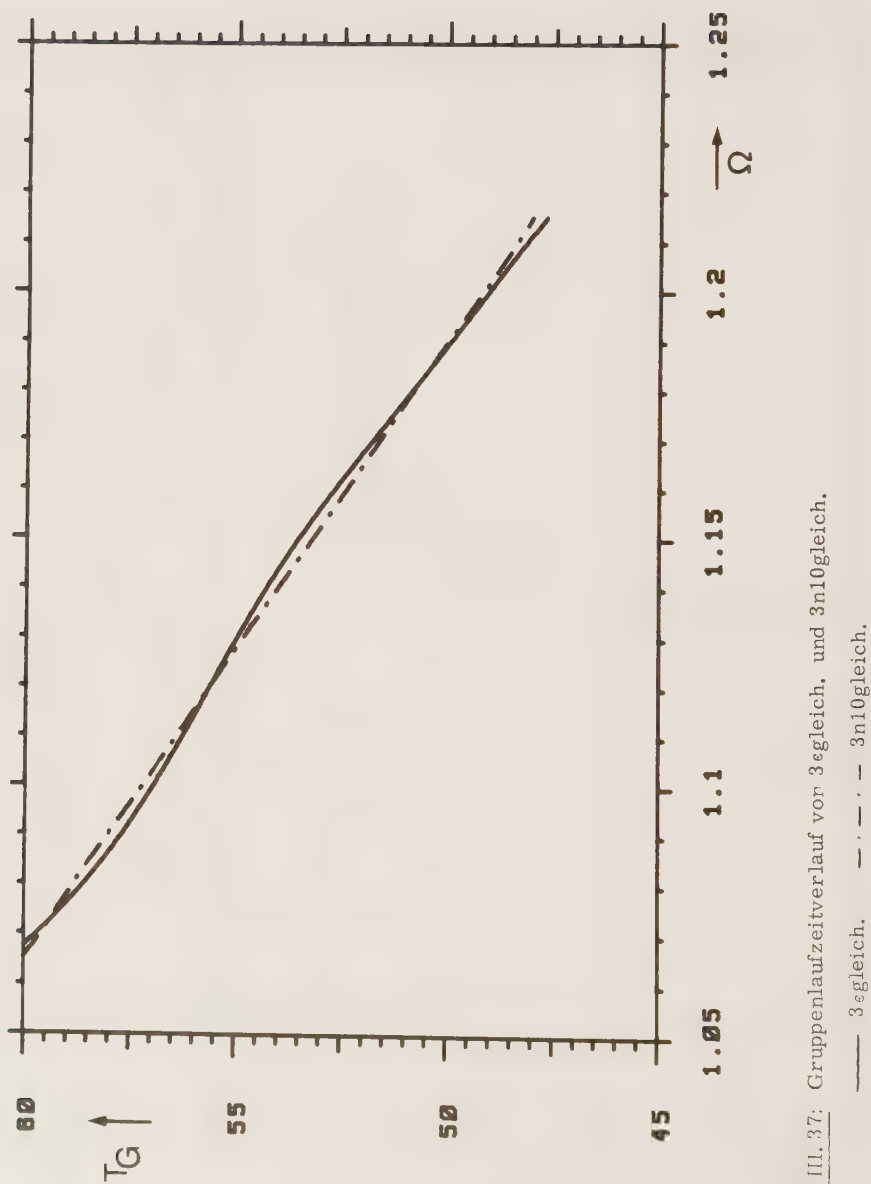


Bild III. 37: Gruppenlaufzeitverlauf vor  $3\epsilon$ gleich. und  $3n10$ gleich.

—  $3\epsilon$ gleich. — · —  $3n10$ gleich.

#### Beispiel 4

$$\begin{array}{lll} \text{Vorschrift: } 0,1 \leq \Omega \leq 0,5 & a_N(\Omega) \geq 60 \text{ dB} \\ 1,05 \leq \Omega \leq 2,55 & a_S(\Omega) = 0,5 \text{ dB} \pm 0,5 \text{ dB} \\ 1,05 \leq \Omega \leq 2,55 & T_G(\Omega) = 0,0 \pm 0,15708 \end{array}$$

Die Konstante war als  $K = 7,181746$  gegeben.

Als Bezugsfrequenz wurde  $f_B = 1 \text{ kHz}$  gewählt.

Die Dämpfungsvorschrift zeigt Bild III. 38, die Gruppenlaufzeitvorschrift Bild III. 39. Das Ergebnis der sukzessiven Approximation, 4sukz., ist in der folgenden Tabelle angegeben:

#### Parameterwerte der Startlösung 4sukz.

|              |                                             |                         |
|--------------|---------------------------------------------|-------------------------|
| $p_0 =$      | 0,0                                         | (festgehalten)          |
| $p_0 =$      | $0,0 \pm 0,3120000000 \text{ j}$            | (Realteil festgehalten) |
| $p_0 =$      | $0,0 \pm 0,4787510000 \text{ j}$            | ( " " )                 |
| $p_0 =$      | $0,5800000000 \pm 2,4500000000 \text{ j}$   |                         |
| $p_0 =$      | $0,6700000000 \pm 1,6280000000 \text{ j}$   |                         |
| $p_\infty =$ | $-0,03468050000 \pm 0,8733290000 \text{ j}$ |                         |
| $p_\infty =$ | $-0,6582300000 \pm 1,1500000000 \text{ j}$  |                         |
| $p_\infty =$ | $-0,8179680000 \pm 1,008811000 \text{ j}$   |                         |
| $p_\infty =$ | $-0,6500000000 \pm 2,8000000000 \text{ j}$  |                         |
| $p_\infty =$ | $-0,5800000000 \pm 2,4500000000 \text{ j}$  |                         |
| $p_\infty =$ | $-0,6700000000 \pm 1,6280000000 \text{ j}$  |                         |
| $t_0 =$      | 6,63123670                                  |                         |

Die gleichzeitige Approximation wurde sowohl mit dem Grad 12 der Startlösung 4sukz. als auch mit dem Grad 10 durchgeführt.

Die Approximation mit diesem Grad ergab drei verschiedene Lösungen, die mit 4n10gleich. A, 4n10gleich. B und 4n10gleich. C bezeichnet sind; die Approximation mit dem Grad 12 ergab die Lösung 4n12gleich. . Folgende Parameterwerte kennzeichnen die Lösungen:

Parameterwerte der Lösung 4n10gleich. A

|                |                                               |                         |
|----------------|-----------------------------------------------|-------------------------|
| $p_o =$        | 0, 0                                          | (festgehalten)          |
| $p_o =$        | $0, 0 \pm 0, 3125308728 \text{ j}$            | (Realteil festgehalten) |
| $p_o =$        | $0, 0 \pm 0, 4806918133 \text{ j}$            | ( " " )                 |
| $p_o =$        | $0, 7833775256 \pm 2, 130758086 \text{ j}$    |                         |
| $p_\infty = -$ | $0, 001822282657 \pm 0, 8736333302 \text{ j}$ |                         |
| $p_\infty = -$ | $0, 5864055772 \pm 0, 9328807010 \text{ j}$   |                         |
| $p_\infty = -$ | $0, 8263816167 \pm 1, 463114021 \text{ j}$    |                         |
| $p_\infty = -$ | $0, 5066733605 \pm 2, 708940087 \text{ j}$    |                         |
| $p_\infty = -$ | $1, 099503546 \pm 1, 911067193 \text{ j}$     |                         |
| $t_0 =$        | 4, 31916524                                   |                         |

Parameterwerte der Lösung 4n10gleich. B

|                |                                               |                         |
|----------------|-----------------------------------------------|-------------------------|
| $p_o =$        | 0, 0                                          | (festgehalten)          |
| $p_o =$        | $0, 0 \pm 0, 3114935758 \text{ j}$            | (Realteil festgehalten) |
| $p_o =$        | $0, 0 \pm 0, 4804360879 \text{ j}$            | ( " " )                 |
| $p_o =$        | $0, 7697619632 \pm 2, 126349249 \text{ j}$    |                         |
| $p_\infty = -$ | $0, 002452291500 \pm 0, 8763528171 \text{ j}$ |                         |
| $p_\infty = -$ | $0, 7313585234 \pm 1, 027441859 \text{ j}$    |                         |
| $p_\infty = -$ | $0, 7772057405 \pm 1, 194975612 \text{ j}$    |                         |
| $p_\infty = -$ | $0, 5329999838 \pm 2, 707614508 \text{ j}$    |                         |
| $p_\infty = -$ | $0, 9581478744 \pm 2, 027539640 \text{ j}$    |                         |
| $t_0 =$        | 4, 35021049                                   |                         |

Parameterwerte der Lösung 4n10gleich. C

|         |                                            |                         |
|---------|--------------------------------------------|-------------------------|
| $p_o =$ | 0, 0                                       | (festgehalten)          |
| $p_o =$ | $0, 0 \pm 0, 3113311272 \text{ j}$         | (Realteil festgehalten) |
| $p_o =$ | $0, 0 \pm 0, 4804653792 \text{ j}$         | ( " " )                 |
| $p_o =$ | $0, 7752351547 \pm 2, 123068471 \text{ j}$ |                         |

$$\begin{aligned}
 p_{\infty} &= - 0,003642709619 \pm 0,8764047545 \text{ j} \\
 p_{\infty} &= - 0,6309584952 \pm 0,9688618709 \text{ j} \\
 p_{\infty} &= - 0,9035531674 \pm 1,401724184 \text{ j} \\
 p_{\infty} &= - 0,4972576504 \pm 2,695604538 \text{ j} \\
 p_{\infty} &= - 1,027998174 \pm 1,839567869 \text{ j} \\
 t_0 &= 4,35810948
 \end{aligned}$$

Parameterwerte der Lösung 4n12gleich.

$$\begin{aligned}
 p_0 &= 0,0 && \text{(festgehalten)} \\
 p_0 &= 0,0 \pm 0,3162150780 \text{ j} && \text{(Realteil festgehalten)} \\
 p_0 &= 0,0 \pm 0,4817944628 \text{ j} && ( \quad " \quad " \quad ) \\
 p_0 &= 0,6133068930 \pm 2,468995051 \text{ j} \\
 p_0 &= 0,6855194084 \pm 1,633157206 \text{ j} \\
 p_{\infty} &= - 0,0002433339203 \pm 0,8370397954 \text{ j} \\
 p_{\infty} &= - 0,3905538980 \pm 1,012497909 \text{ j} \\
 p_{\infty} &= - 0,9117074794 \pm 1,403358572 \text{ j} \\
 p_{\infty} &= - 0,5112487978 \pm 2,782872044 \text{ j} \\
 p_{\infty} &= - 0,7997742668 \pm 2,362733709 \text{ j} \\
 p_{\infty} &= - 0,7736311623 \pm 1,739097633 \text{ j} \\
 t_0 &= 6,40779986
 \end{aligned}$$

Als erstes erfolgt der Vergleich des Ergebnisses von sukzessiver Approximation, 4sukz., mit den Ergebnissen der gleichzeitigen Approximation vom Grad 12, 4n12gleich., und vom Grad 10, 4n10gleich. . Die gradniedrigere Approximation ergab drei verschiedene Lösungen, von denen die Lösung 4n10gleich. A für diesen Vergleich genommen wurde. Der Dämpfungsverlauf ist im Bild III. 40 gegeben, der Dämpfungs-Fehlerverlauf im Bild III. 41 und der Gruppenlaufzeit-Fehlerverlauf im Bild III. 42.

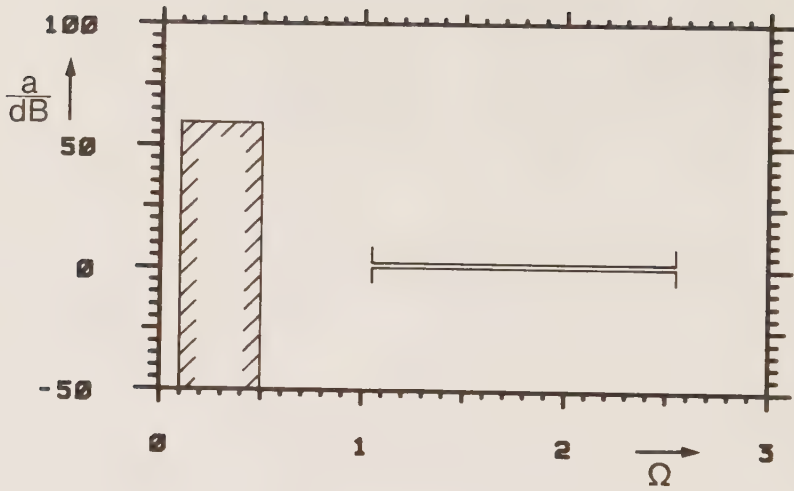


Bild III. 38: Dämpfungsvorschrift für Beispiel 4

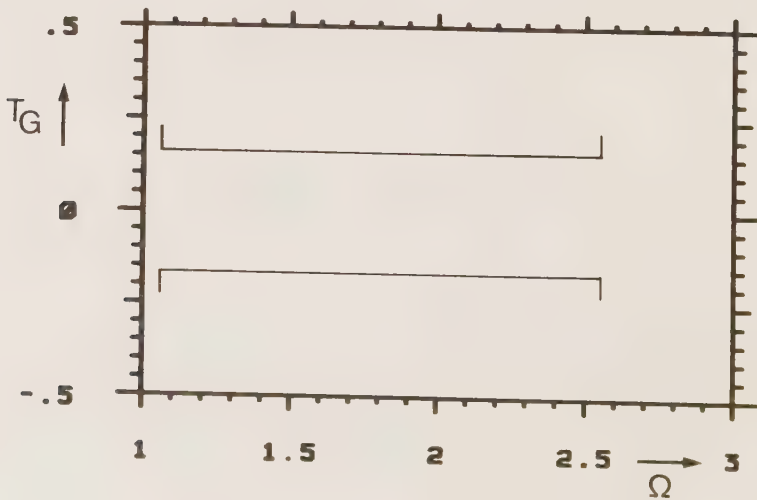


Bild III. 39: Gruppenlaufzeitvorschrift für Beispiel 4

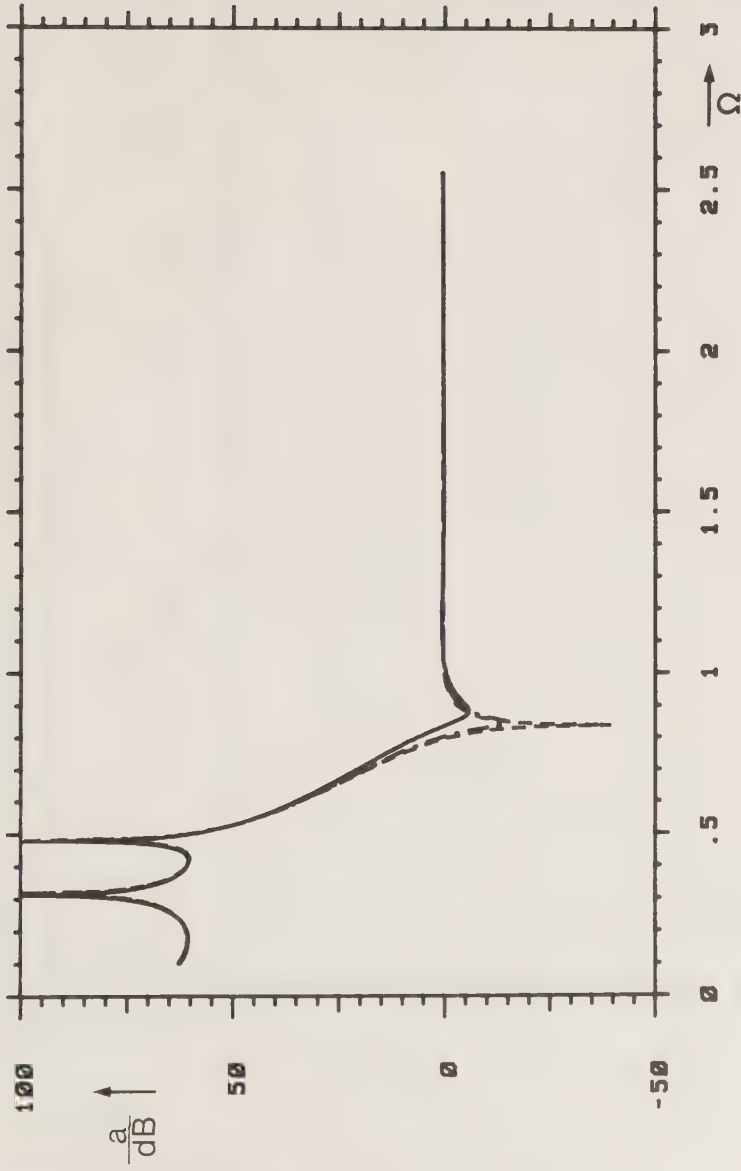


Bild III. 40: Dämpfungsverlauf von 4sukz., 4n10gleich, A und 4n12gleich.  
— 4sukz. ---- 4n10gleich. A - · - · - 4n12gleich.

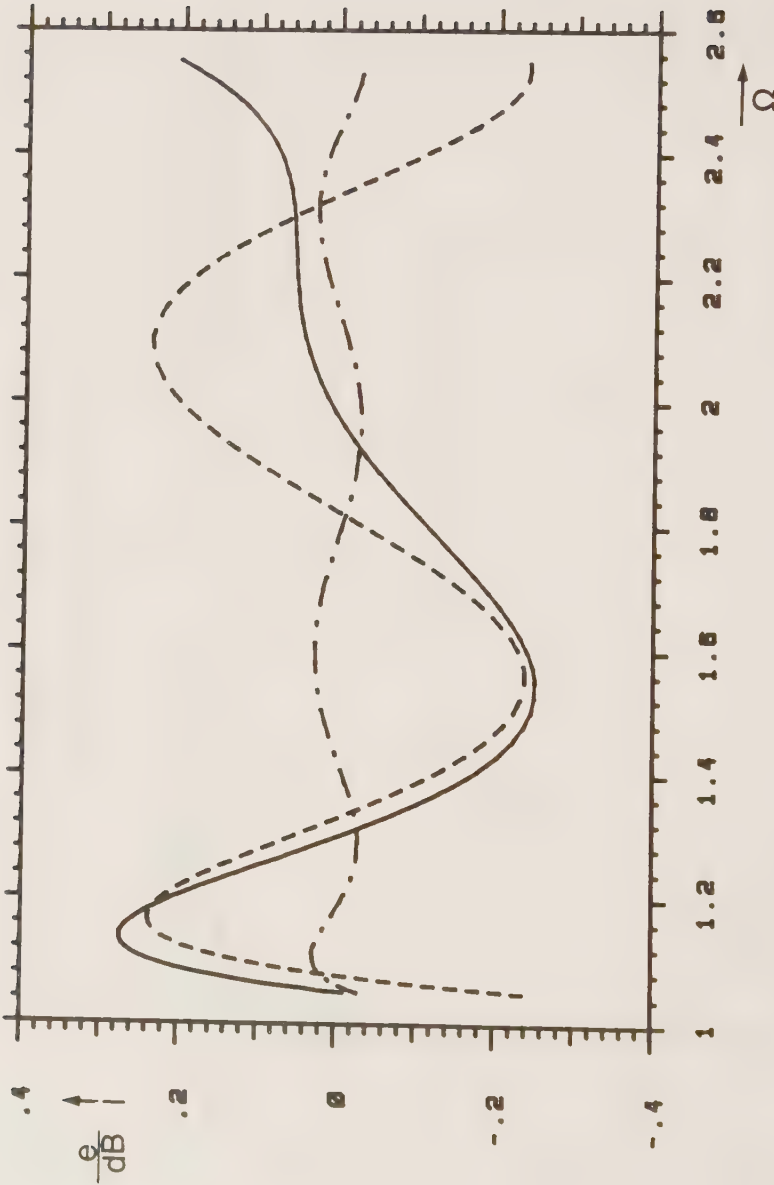


Bild 11.41: Dämpfungs-Fehlverlauf von 4sukz., 4n10gleich, A und 4n12gleich.  
 — 4sukz.    ---- 4n10gleich, A    - · - · - 4n12gleich.

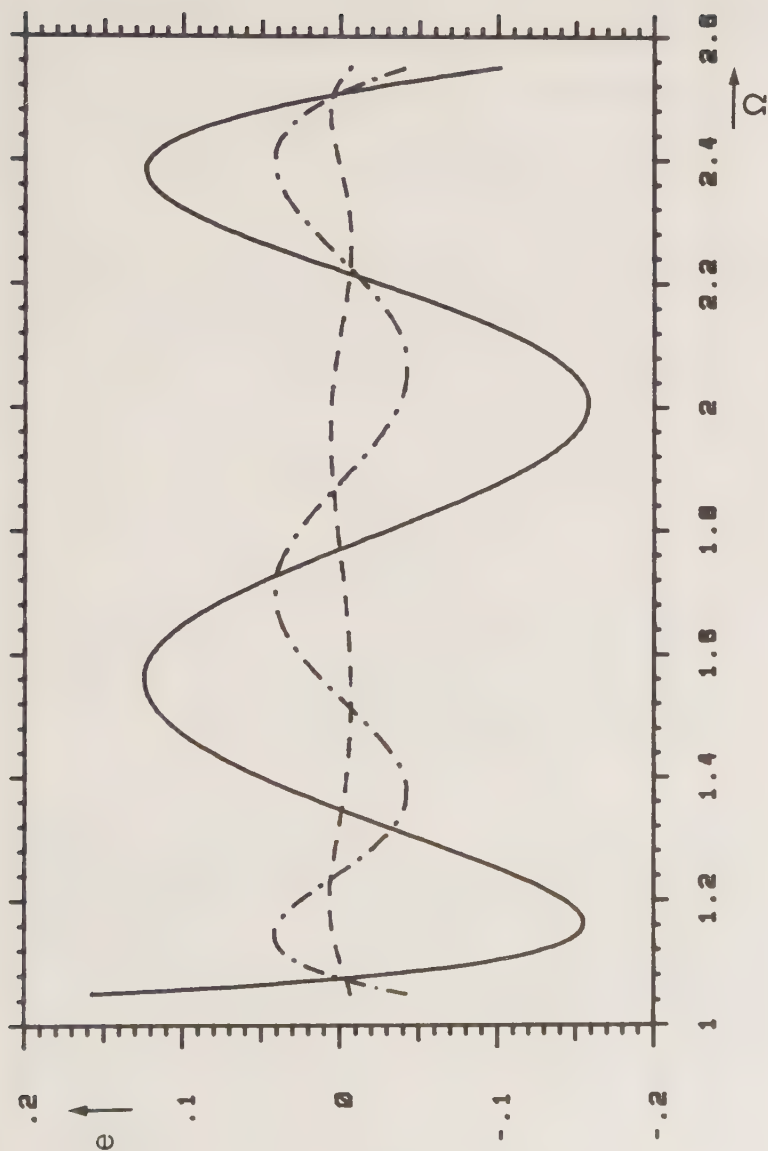


Bild III. 42: Gruppenlaufzeit-Fehlverlauf von 4sukz., 4n10gleich. A und 4n12gleich.

Als nächstes sollen die Fehler der Lösungen 4n10gleich. A und 4n12gleich. mit denen der Lösung 4sukz. verglichen werden.

$$\text{Dämpfungsfehler: } \frac{e_{4\text{sukz.}}}{e_{4\text{n10gleich. A}}} = 1,2$$

$$\text{Gruppenlaufzeitfehler: } \frac{e_{4\text{sukz.}}}{e_{4\text{n10gleich. A}}} = 24,0$$

Die gleichzeitige Approximation mit niedrigerem Grad liefert ein im Dämpfungsverlauf etwas besseres Ergebnis als die sukzessive Approximation, im Gruppenlaufzeitverlauf ist der Gewinn dagegen überraschend groß.

$$\text{Dämpfungsfehler: } \frac{e_{4\text{sukz.}}}{e_{4\text{n12gleich.}}} = 9,7$$

$$\text{Gruppenlaufzeitfehler: } \frac{e_{4\text{sukz.}}}{e_{4\text{n12gleich.}}} = 3,8$$

Nun werden die drei Lösungen mit dem Grad 10 miteinander verglichen. Bild III. 43 stellt den Dämpfungsverlauf, Bild III. 44 den Dämpfungs-Fehlerverlauf und Bild III. 45 den Gruppenlaufzeit-Fehlerverlauf dieser drei Lösungen dar.

Schließlich wurde die Vorschrift in der Art approximiert, daß Nullstellen außer auf der imaginären Achse der p-Ebene nur als Quadrupel auftreten dürfen. Zu diesem Zweck war eine Erweiterung nötig, so daß diese Lösung mit der Bezeichnung 4Qugleich. den Grad 16 hatte.

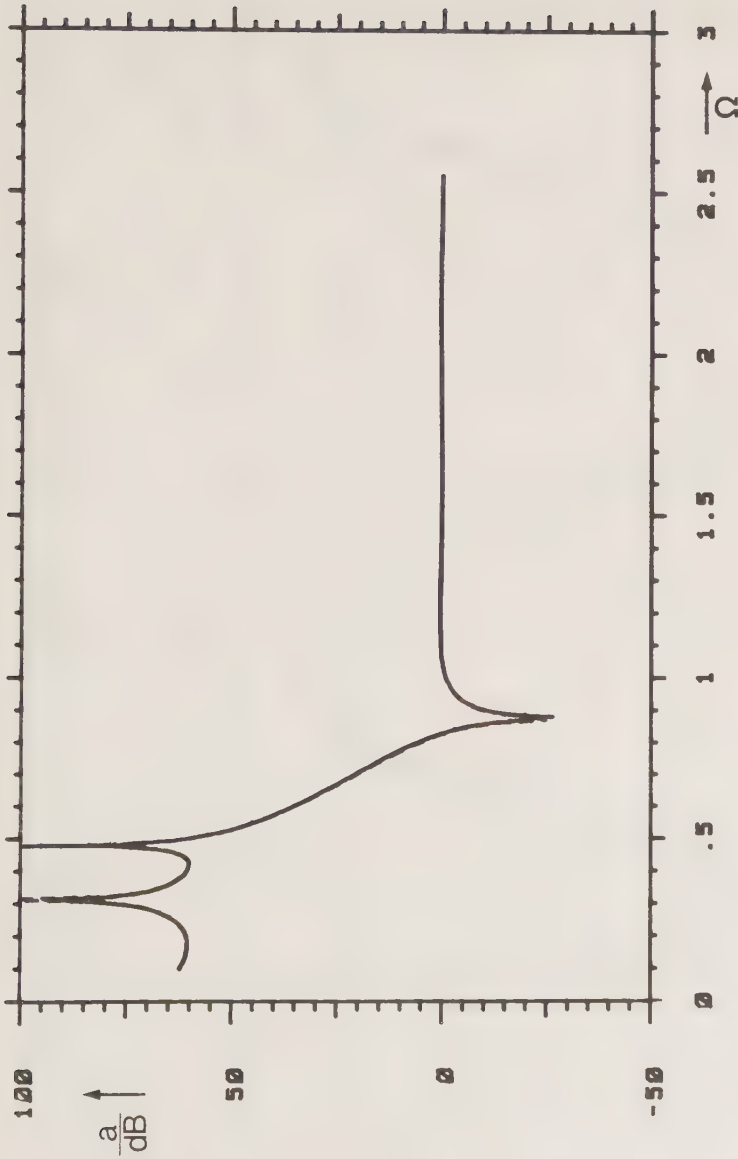


Bild III. 43: Dämpfungsverlauf von 4n10gleich, C, 4n10gleich, A und 4n10gleich, B  
 — 4n10gleich, C    ---- 4n10gleich, A    - · - · - 4n10gleich, B

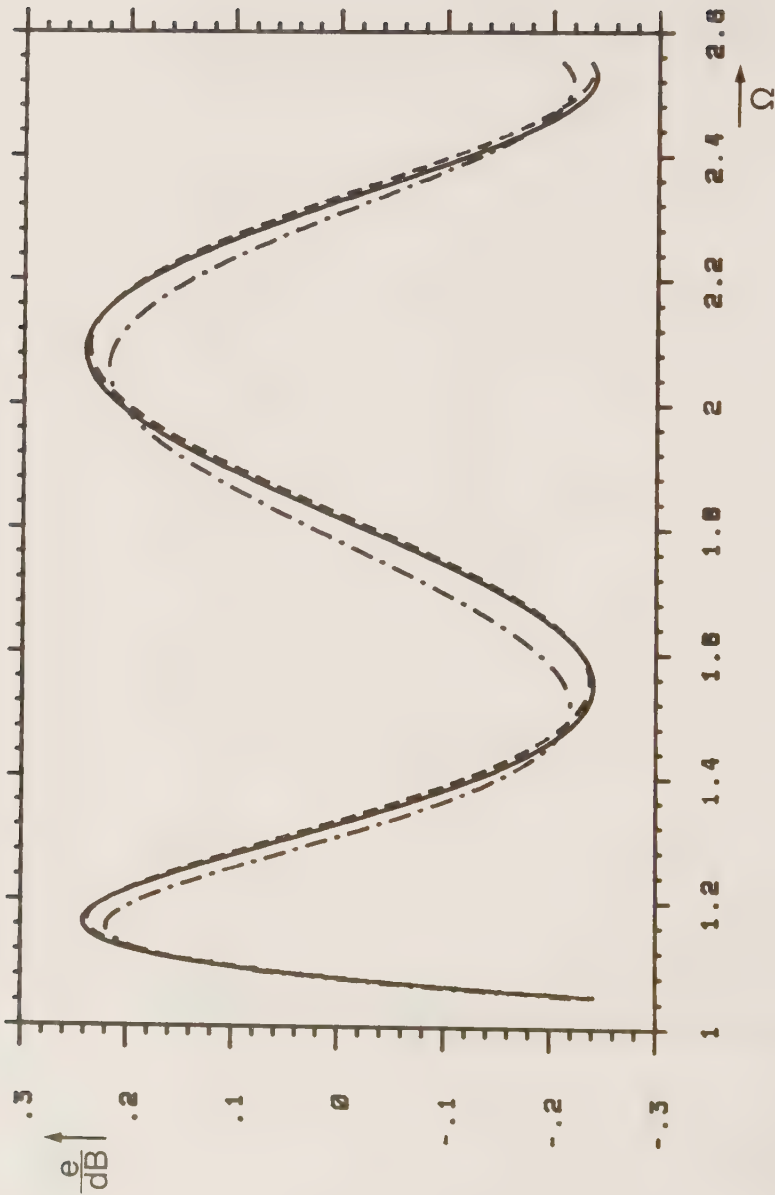


Bild III. 44: Dämpfungs-Fehlerverlauf von 4n10gleich, C, 4n10gleich, A und 4n10gleich, B  
 — 4n10gleich, C    ---- 4n10gleich, A    -.-.- 4n10gleich, B

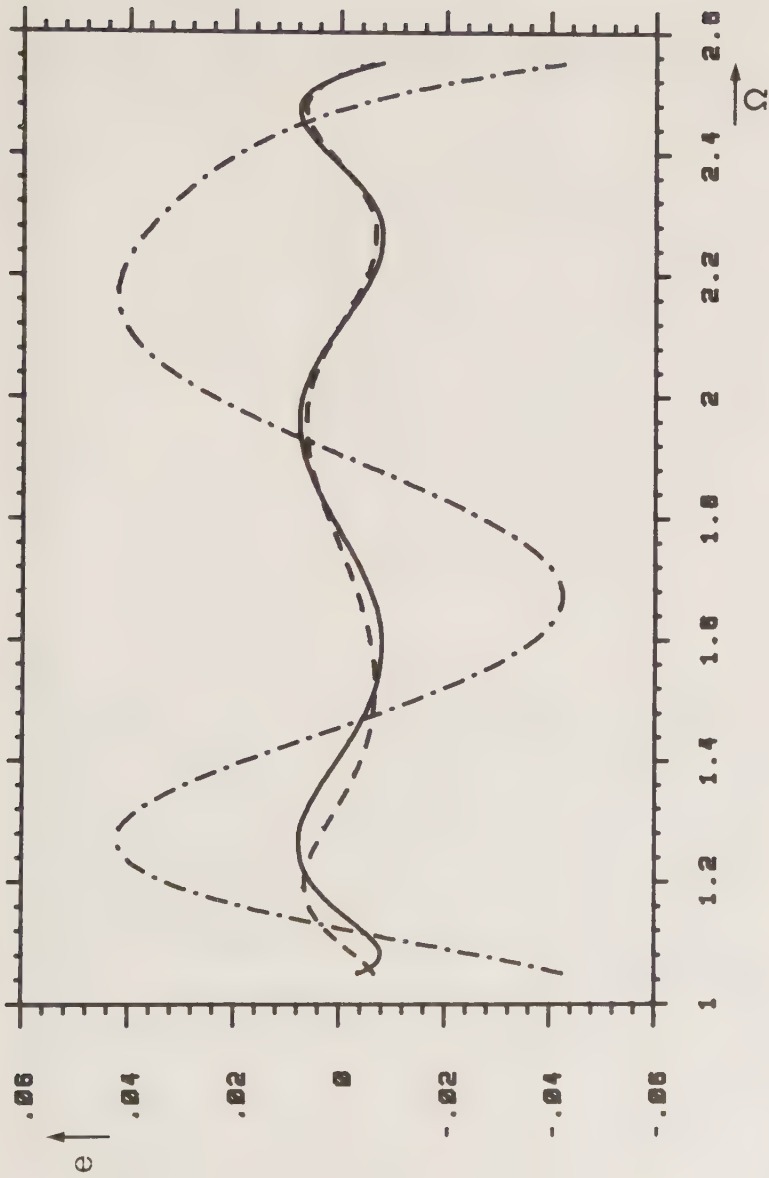


Bild III. 45: Gruppenlaufzeit-Fehlervverlauf von 4n10gleich, C, 4n10gleich, A und 4n10gleich, B  
—— 4n10gleich, C    ---- 4n10gleich, A    - · - · - 4n10gleich, B

Die zugehörigen Parameterwerte enthält die nächste Tabelle:

Parameterwerte der Lösung 4QUgleich.

|                |                                            |                         |
|----------------|--------------------------------------------|-------------------------|
| $p_o =$        | 0,0                                        | (festgehalten)          |
| $p_o =$        | $0,0 \pm 0,3159083550 \text{ j}$           | (Realteil festgehalten) |
| $p_o =$        | $0,0 \pm 0,4816702922 \text{ j}$           | ( " " )                 |
| $p_o = \pm$    | $0,6873161123 \pm 1,645103412 \text{ j}$   |                         |
| $p_o = \pm$    | $0,6157902414 \pm 2,481362140 \text{ j}$   |                         |
| $p_\infty = -$ | $0,8505282496 \pm 1,809214342 \text{ j}$   |                         |
| $p_\infty = -$ | $0,8706495596 \pm 2,342920377 \text{ j}$   |                         |
| $p_\infty = -$ | $0,01048741003 \pm 0,8448276014 \text{ j}$ |                         |
| $p_\infty = -$ | $0,6248364254 \pm 1,377036597 \text{ j}$   |                         |
| $p_\infty = -$ | $0,4372595318 \pm 0,9792435733 \text{ j}$  |                         |
| $p_\infty = -$ | $0,4158991906 \pm 2,763329795 \text{ j}$   |                         |
| $p_\infty = -$ | $0,8505283632 \pm 1,809214356 \text{ j}$   |                         |
| $p_\infty = -$ | $0,7009436919 \pm 2,346816174 \text{ j}$   |                         |
| $t_o =$        | 6,40739067                                 |                         |

Bild III. 46 zeigt den Dämpfungsverlauf. Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitfehler der Quadrupellösung wurden mit den Lösungen 4sukz. sowie 4n12gleich. verglichen. Den Dämpfungs-Fehlerverlauf enthält Bild III. 47, den Gruppenlaufzeit-Fehlerverlauf Bild III. 48. Da der Gruppenlaufzeitfehler der Quadrupellösung 4QUgleich. erheblich kleiner ist als die beiden anderen Fehler im Bild III. 48, wurde er im Bild III. 49 stark vergrößert dargestellt, um den völlig gleichmäßigen Verlauf auch dieser Fehlerkurve zu zeigen.

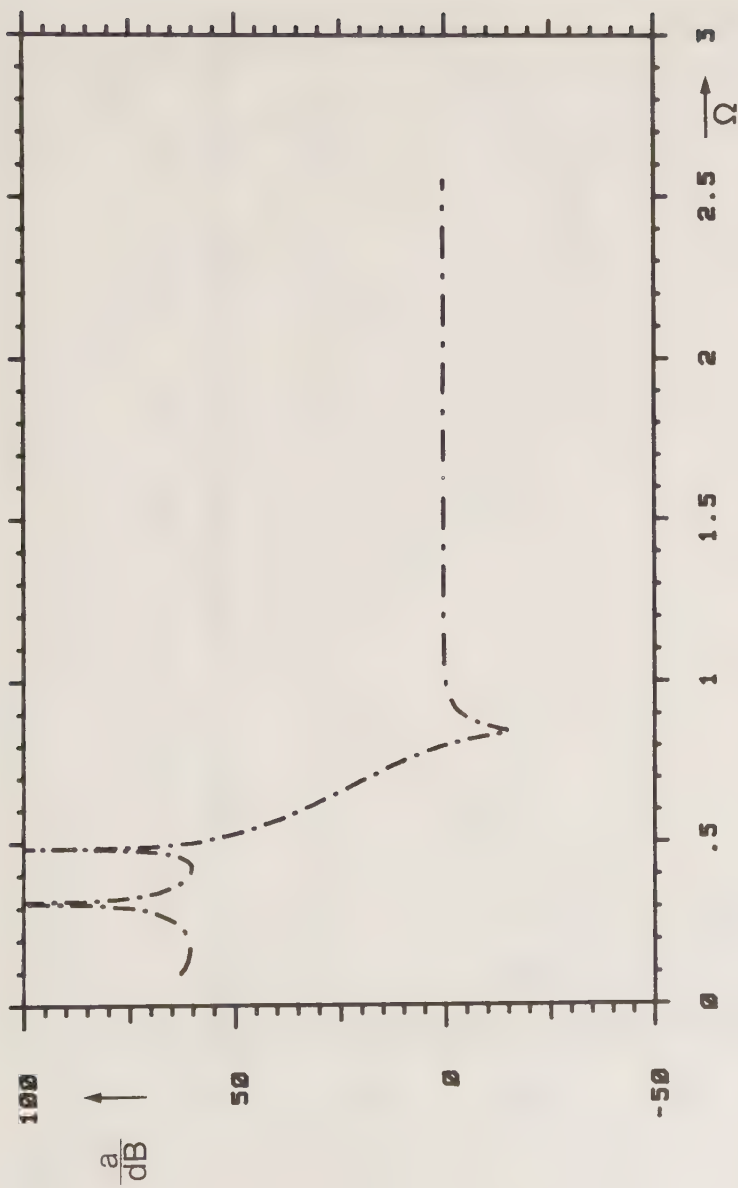


Bild III, 46: Dämpfungsverlauf von 4QUgleich. — · — · — 4QUgleich.

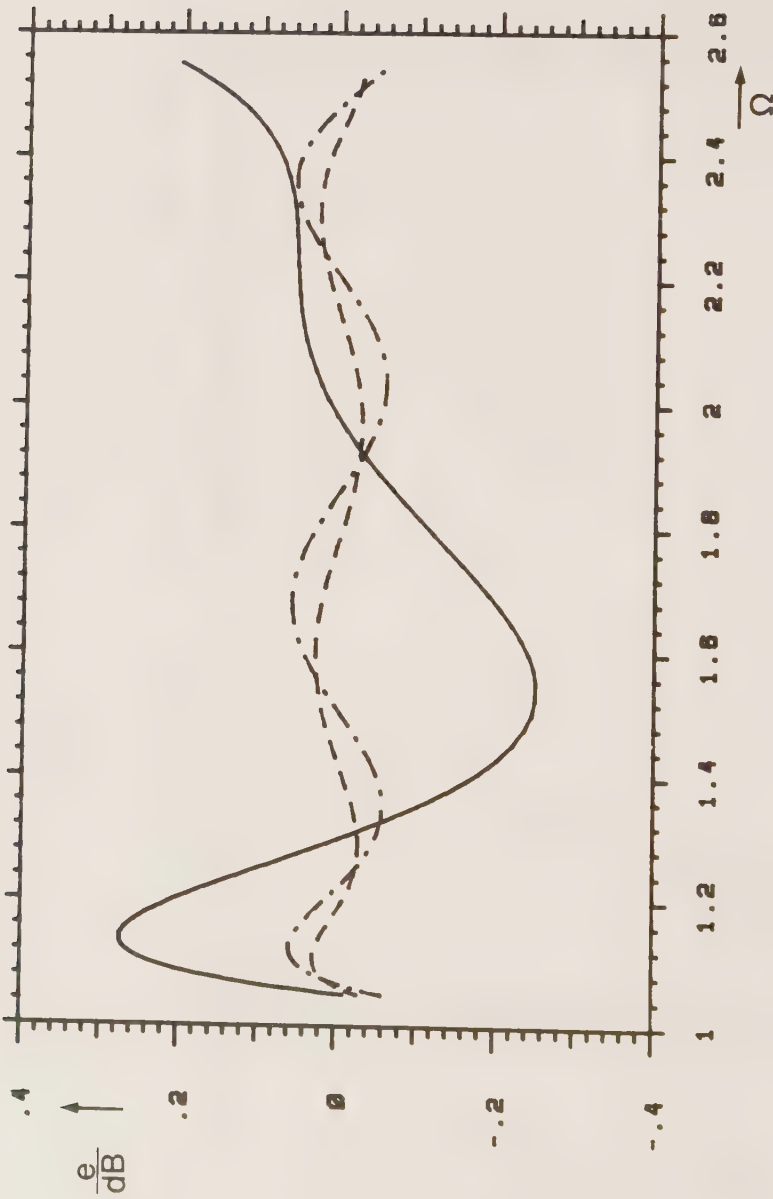


Bild III. 47: Dämpfungs-Fehlverlauf von 4sukz., 4n12gleich. und 4QUgleich.  
 — 4sukz.    - - - - 4n12gleich.    - · - · - 4QUgleich.

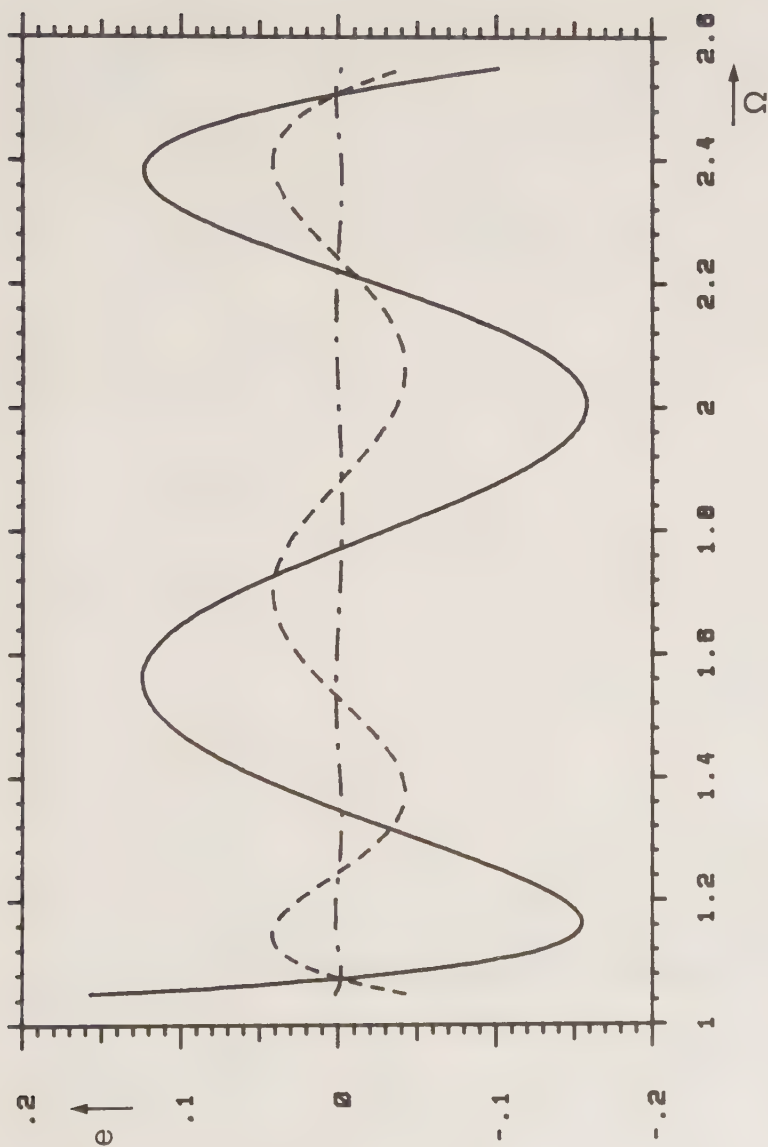


Bild III. 48: Gruppenlaufzeit-Fehlerverlauf von 4sukz., 4n12gleich. und 4QUgleich.  
 — 4sukz.    ---- 4n12gleich.    - . - . 4QUgleich.

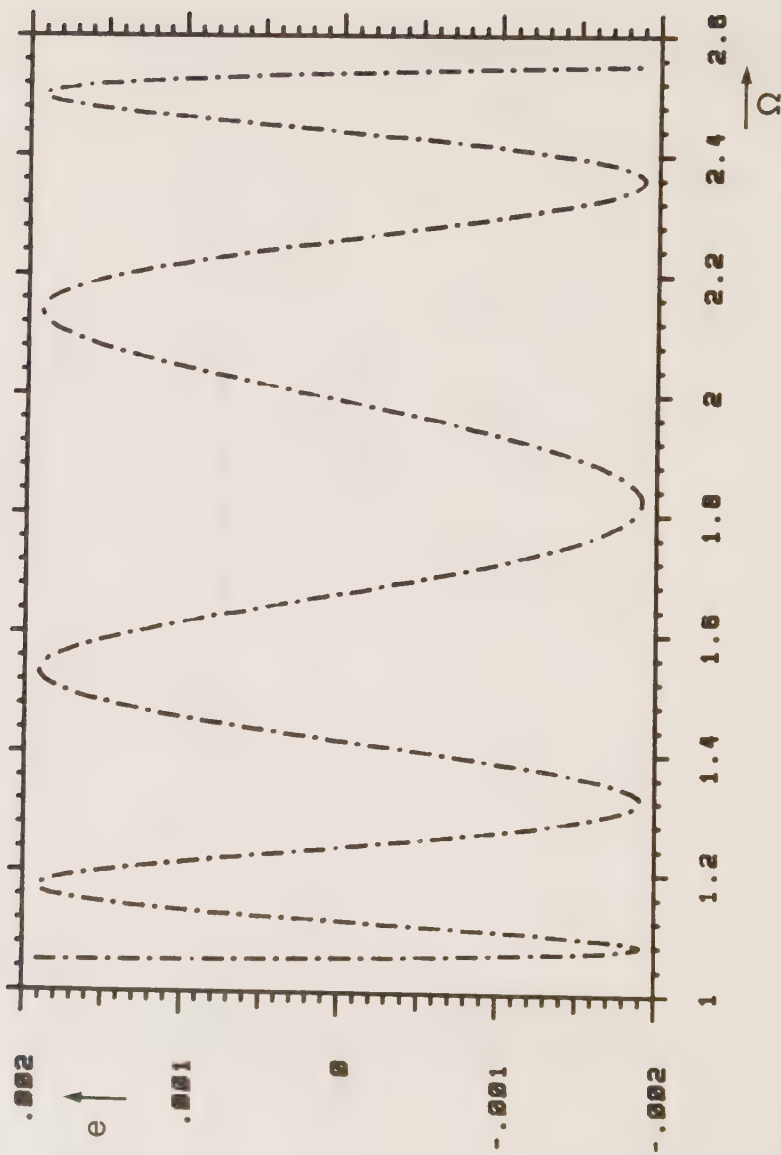


Bild III. 49: Gruppenlaufzeit-Fehlverlauf von 4QUgleich.

--- 4QUgleich.

Wie aus diesen Beispielen hervorgeht, ermöglicht es das hier vorgelegte Verfahren zur gleichzeitigen Approximation die an Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitverlauf gestellten Forderungen im allgemeinen mit einem niedrigeren Grad besser zu erfüllen, als dies durch sukzessive Approximation zu erreichen ist. Wählt man den gleichen Grad wie bei der sukzessiven Approximation, dann bekommt man, verglichen mit dieser, meist eine wesentlich bessere Lösung. Die Qualität einer solchen Lösung war in den beschriebenen Beispielen bis um den Faktor 70 besser.

# LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. Unbehauen  
Synthese elektrischer Netzwerke  
R. Oldenbourg Verlag, München Wien 1972
  
- [2] J.R. Rice  
The approximation of functions I  
Addison-Wesley, Reading, Mass. 1964
  
- [3] J.R. Rice  
The approximation of functions II  
Addison - Wesley, Reading , Mass. 1969
  
- [4] H. L. Loeb  
On rational fraction approximations at discrete points  
Convair Astronautics, Math. Preprint Nr. 9, 1957
  
- [5] U. Hoffmann, H. Hofmann  
Einführung in die Optimierung  
Verlag Chemie, Weinheim/Bergstraße 1971
  
- [6] G. Meinardus  
Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung  
Springer, Berlin 1964
  
- [7] A. Ralston, H. S. Wilf  
Mathematische Methoden für Digitalrechner II  
Oldenbourg, München 1969

- [8] C. Unger  
Approximation im Bereich der rationalen Funktionen.  
Diplomarbeit am Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik,  
TH Stuttgart 1966
  
- [9] E. Wehrhahn  
Neue Analyse- und Optimierungsmethoden für den rechnerge-  
stützten Entwurf elektrischer Netzwerke  
Habilitationsschrift Universität Erlangen-Nürnberg 1978
  
- [10] R. Fletcher, M. J. D. Powell  
A rapidly convergent descent method for minimization  
Computer Journal 6 (1963), S. 163-168
  
- [11] R. Unbehauen  
Die Approximationsaufgabe in der Netzwerksynthese und ihre  
Lösungen  
NTZ 21 (1968), S. 593-602
  
- [12] R. Saal  
Ein Beitrag zur Synthese von Reaktanz-Allpaß-Schaltungen  
Dissertation TH München 1963
  
- [13] K. H. Feistel  
Über die Messung und Entzerrung von Fernsprechanälen im Fre-  
quenzbereich zur Ermöglichung schneller Datenübertragungen  
Dissertation Universität Erlangen-Nürnberg 1972
  
- [14] E. W. Cheney  
Introduction to approximation theory  
Mc Graw-Hill, New York 1966

- [15] B. Gaißmaier  
Beiträge zur Approximation von Dämpfungsentzerrern  
Dissertation Universität Erlangen-Nürnberg 1975
- [16] E. Stiefel  
Über diskrete und lineare Tschebyscheff-Approximation  
Numerische Mathematik 1 (1959), S. 1-28
- [17] R. Zurmühl  
Matrizen und ihre technischen Anwendungen  
Springer, Berlin 1964
- [18] L. Collatz, W. Krabs  
Approximationstheorie  
B. G. Teubner, Stuttgart 1973
- [19] A. Reibiger  
Über die Charakterisierung Tschebyscheffscher Phasen- und  
Laufzeitapproximationen, Teil I  
Z. elektr. Inform. - und Energietechnik, Leipzig 1 (1971), S. 7-14
- [20] A. Reibiger  
Über Tschebyscheffsche Phasen- und Gruppenlaufzeitapproximationen  
Technische Mitteilungen des RFZ, Heft 2/1972, S. 54-58
- [21] A. Reibiger  
Beiträge zur Approximation von Phasen- und Laufzeitcharakteri-  
stiken  
Nachrichtentechnik 22 (1972), Heft 7, S. 223-225

- [22] A. Reibiger  
Anwendungen der nicht-linearen Approximationstheorie auf  
Probleme der Phasen- und Laufzeitapproximation  
Deutsche Post, Rundfunk- und Fernstechnisches Zentralamt  
Berlin-Adlershof, 1970
- [23] G. Bosse  
Ein Rechenverfahren zur Approximation vorgegebener Laufzeitkurven  
Frequenz 17 (1963), Nr. 3, S. 103-107
- [24] K. H. Feistel, R. Unbehauen  
Tiefpässe mit Tschebyscheff-Charakter der Betriebsdämpfung  
im Sperrbereich und maximal gegebener Laufzeit  
Frequenz 19 (1965), Nr. 8, S. 265-282
- [25] Th. -A. Abele  
Übertragungsfaktoren mit Tschebyscheffscher Approximation  
konstanter Gruppenlaufzeit  
A.E.Ü. 16 (1962), Heft 1, S. 9-18
- [26] E. Ulbrich, H. Piloty  
Über den Entwurf von Allpässen, Tiefpässen und Bandpässen mit  
einer im Tschebyscheffschen Sinne approximierten konstanten  
Gruppenlaufzeit  
A.E.Ü. 14 (1960), Heft 10, S. 451-467
- [27] J. Kuntermann, H. -J. Pfeleiderer, R. Unbehauen  
Über die Tschebyscheff-Approximation vorgegebener Laufzeit-  
funktionen  
Frequenz 23 (1969), Nr. 4, S. 116-126

- [28] C. J. Wellekens  
Simultaneous approximation of the attenuation and group delay  
of reziprocal lossless filters  
Proc. 1974 IEEE International Symposium on CAS, S. 274-277,  
San Francisco 1974
- [29] R. K. Kwan, G. C. Bach  
Simultaneous approximation in filter design  
IEEE Trans. CT-16, Nr. 1, S. 117-121, Februar 1969
- [30] J. H. Wilkinson  
Rundungsfehler  
Springer, Berlin 1965
- [31] B. Gaißmaier, W. Hohnacker, R. Unbehauen, E. Wehrhahn  
Optimierungsverfahren für den Schaltungsentwurf, Überblick  
und vergleichende Beurteilung  
Frequenz 29 (1975), Nr. 4, S. 112-117, Nr. 5, S. 124-133
- [32] G. Golub  
Numerical methods for solving linear least squares problems  
Numerische Mathematik 7 (1965), S. 206-216
- [33] K. Levenberg  
A method for the solution of certain nonlinear problems in least  
squares  
Quart. Appl. Math. 2 (1944), S. 164-168
- [34] J. Kowalik, M. R. Osborne  
Methods for unconstrained optimization problems  
American Elsevier, New York 1968

[35]

B. Brosowski

Nicht-lineare Tschebyscheff-Approximation

Bibliograph. Institut, Mannheim 1968



## Lebenslauf

Christian Franz Paul Krauß

2. 2. 1948      geboren in Landshut als zweites Kind des Bankrats Karl Krauß und seiner Ehefrau Katharina, geb. Rasp
- 1954 - 1958    Besuch der Volksschule, zunächst in Deggendorf, dann in Fürth
- 1958 - 1967    Besuch des Humanistischen Gymnasiums (jetzt Heinrich-Schliemann-Gymnasium) in Fürth; Abschluß mit der Reifeprüfung
- 1967 - 1974    Studium der Elektrotechnik an der Technischen Universität München; Abschluß mit der Diplomprüfung in der Fachrichtung Nachrichtentechnik; Diplomarbeit bei Prof. Dr. Meinke am Institut für Hochfrequenztechnik
- 1974 - 1980    Tätigkeit am Lehrstuhl für Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik der Universität Erlangen-Nürnberg; zunächst als wissenschaftliche Hilfskraft, dann als wissenschaftlicher Assistent





**Copy-Center 2000**

852 ERLANGEN · Obere Karlstr. 30  
Tel. 09131-26197